

3. Prűfung

Lösungen

1. (a) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ Ereignisse ($n \geq 1$). Welche Bedingungen müssen diese Ereignisse nach Definition erfüllen, um ein *vollständiges Ereignissystem* zu bilden?
- (b) Was bedeutet nach Definition, dass eine Zufallsvariable *einfach* ist?
- (c) Seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $\sigma > 0$, und nehmen wir an, dass $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$ eine normalverteilte Zufallsvariable ist. Sei noch $X \sim N(0; 1)$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Geben wir eine Transformierte von X an, deren Verteilung mit der Verteilung von Y übereinstimmt.

Megoldás:

(a) (10 pont)

(5 pont) Ha páronként kizáróak (megfogalmazható úgy is, hogy ha $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ minden $i \neq j$ esetén, de ha a „minden $i \neq j$ esetén”-t kihagyja, akkor max. 3 pont)

(5 pont) és uniójuk Ω (leírható képlettel is, $A_1 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ stb. Kisebb szintaktikai hibák esetén részpont adható.).

(b) (5 pont)

Ha értékkészlete véges. / Ha csak véges sok értéket vesz/vehet fel. / Képlettel valahogy leírja (szintaktikai hibák esetén részpontok adhatók).

Ha nem szerepel, hogy véges, 0 pont. Ha azt írja, hogy véges vagy megszámlálhatóan végtelen, max. 1 pont.

(c) (5 pont)

$\sigma X + \mu$ ugyanolyan eloszlású, mint Y .

Ha azt írja, hogy $Y = \sigma X + \mu$, akkor max. 4 pont (mert van más $N(\mu; \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változó is, pl. $Y = -\sigma X + \mu$ is az, akármilyen is a valószínűségi mező).

Ha azt írja, hogy X és $\frac{Y-\mu}{\sigma}$ azonos eloszlásúak, akkor max. 2 pont. Ha azt, hogy $X = (Y - \mu)/\sigma$, akkor max. 1 pont.

2. Nehmen wir an, dass die Ereignisse A , B und C paarweise unabhängig sind, und die Gleichungen $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{10}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{10}$ gelten. Wir wissen auch, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keines der obigen Ereignisse eintritt, $1/2$ ist. Entscheiden wir, ob A , B und C gemeinsam unabhängig sind. Angenommen, dass mindestens eines der Ereignisse A , B und C eintritt, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle von ihnen (simultan) eintreten?

Megoldás:

(1 pont) A, B, C akkor lesznek együttesen függetlenek, ha $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$,

(1 pont) mivel azt már tudjuk, hogy páratlanul függetlenek (itt azt még nem kell kifejtetni, hogy a páronkénti függetlenség mit jelent, mert arra később adunk pontot).

(1 pont) A Poincaré-formula szerint

(1 pont) $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

(1 pont) (A feladat szövege szerint) $1/2 = \mathbb{P}(\overline{A \cup B \cup C})$ (lehet $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ -nek is írni, ha később kiderül, hogy tudja, hogy ennek a valószínűsége $1 - \mathbb{P}(A \cup B \cup C)$)

(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(A \cup B \cup C)$, tehát $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ szintén $1/2$ -del egyenlő.

(3 pont) $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{3}{50} (= 0,06)$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \frac{3}{100} (= 0,03)$ és $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{50} (= 0,02)$

(1 pont) a páronkénti függetlenség miatt.

(2 pont) Így tehát $\frac{1}{2} = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{3}{50} - \frac{3}{100} - \frac{1}{50} + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$, vagyis $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{100} (= 0,01)$ (ebből 1 pont $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ értékére, és 1 pont arra, hogy legalább annyira részletezi a számításokat, hogy abból számológéppel és egyszerű összevonásokkal kijöjjön az értéke),

(1 pont) viszont $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{3}{500} \neq \frac{1}{100}$, ezért nem együttesen függetlenek.

(3 pont) A második kérdésben a keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap B \cap C | A \cup B \cup C)$ (ebből 1–1 pont jár a két esemény azonosítására, és 1 arra, hogy a megfelelő feltételes valószínűséget írja fel),

(1+1 pont) $= \frac{\mathbb{P}((A \cap B \cap C) \cap (A \cup B \cup C))}{\mathbb{P}(A \cup B \cup C)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(A \cup B \cup C)}$ (a két pont összevonható, elég, ha a második kifejezés szerepel)

(1 pont) $= \frac{1/100}{1/2}$ (az a) rész szerint; nem kell indokolni)

(1 pont) $= \frac{1}{50} (= 0,02)$.

3. Seien $X \sim N(1; 9)$ und $Y \sim N(-1; 16)$ unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen.

(a) Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(2 < X < 3)$.

(b) Seien $Z = X + Y + 2024$ und $W = Y - 2X$. Berechnen wir den Wert von $\text{cov}(Z, W)$.

(c) Bestimmen wir den Erwartungswert und die Varianz von $X + Y$.

Begründen wir die Richtigkeit der Rechnungen!

Megoldás:

(a) (6 pont)

(2 pont) $\mathbb{P}(2 < X < 3) = F_X(3) - F_X(2)$, ahol F_X az X eloszlásfüggvénye,

(2 pont) $= \Phi\left(\frac{3-1}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2-1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(\frac{1}{3}\right)$

(1 pont) $\approx \Phi(0,67) - \Phi(0,33) \approx 0,7486 - 0,6293$

(1 pont) $= 0,1193$.

Egy másik lehetséges megoldás:

(2 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}(2 < X < 3) = \mathbb{P}\left(\frac{2-1}{3} < \frac{X-1}{3} < \frac{3-1}{3}\right),$$

(1 pont) $= \Phi(2/3) - \Phi(1/3)$,

(1 pont)^a mert az $(X-1)/3$ (vagy: $(X - \mathbb{E}(X))/\mathbb{D}(X)$) val. változó (az előadáson tanultak szerint) standard normális eloszlású. (Az elég, ha impliciten derül ki, hogy 1 a várható érték és $3 = \sqrt{9}$ a szórás.)

(1 pont) $\approx \Phi(0,67) - \Phi(0,33) \approx 0,7486 - 0,6293$

(1 pont) $= 0,1193$.

(b) (9 pont)

(1 pont) $\text{cov}(Z, W) = \text{cov}(X + Y, X - 2Y)$ (elég, ha a következő lépések valamelyikéből derül ki, hogy az additív konstans el lehet hagyni. Ha nem hagyja el az additív konstans, akkor ez a pont abban az esetben jár, ha a végén rájön, hogy a konstans tartalmazó tag értéke 0)

(2 pont) $= \text{cov}(X, Y) - 2\text{cov}(X, X) + \text{cov}(Y, Y) - 2\text{cov}(X, Y)$ (ebből 1 pont a tagokra bontásra, 1 a 2-es szorzók kiemelésére, ami összevonható egy lépésbe, ahogy itt is írtam)

(0 pont) $= -2\text{cov}(X, X) + \text{cov}(Y, Y) - \text{cov}(X, Y)$,

(1 pont) ahol $-2\text{cov}(X, X) = -2\mathbb{D}^2(X) = -18$,

(1 pont) $\text{cov}(Y, Y) = \mathbb{D}^2(Y) = 16$,

(1 pont) és $\text{cov}(Y, X) = 0$,

(2 pont) mert függetlenek,

^aHa azt mondja, hogy a CHT miatt közelít azzal a standard normálissal, ami X standardizáltját valójában nem csupán közelíti, hanem megegyezik vele, akkor ez a pont nem jár (még akkor sem, ha hivatkozik a CHT-re, mert nem approximálni akarunk, hanem pontos eredményt kapni – a táblázat pontosságának erejéig). A többi pont ilyen esetben is megszerezhető.

(1 pont) tehát $\text{cov}(Z, W) = -2$.

(c) (5 pont)

1. megoldás.

(1+1 pont) $X + Y \sim N(-1 + 1; 9 + 16) = N(0; 25)$, vagyis $\mathbb{E}(X) = 0$ és $\mathbb{D}^2(X) = 25$,

(2 pont) mert független normálisok összege normális

(1 pont) és a paraméterek összeadódnak (utóbbira jár 1 pont akkor is, ha ezt nem írja le ilyen általánosan, de az visszakövethető a megoldásból, hogy a várható értékeket és a szórásnégyzeteket is összeadja).

2. megoldás.

(1 pont) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 1 - 1 = 0$ (nem kell indokolni)

(1+1 pont) és $\mathbb{D}^2(X + Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) = 9 + 16 = 25$ (1 pont arra, hogy a szórásnégyzetek összeadódnak és 1 a konkrét értékekre és azok összeadására),

(2 pont) mert függetlenek.

4. Wir beobachten zwei Glühbirnen, die nebeneinander an der Decke eines Raumes hängen. Am Anfang unserer Beobachtung sind beide Birnen noch betriebsbereit. Die verbleibenden Zeitdauern bis zum Ausbrennen der einzelnen Birnen werden durch zwei unabhängige absolut stetige und gedächtnislose Zufallsvariablen beschrieben, die beide den Erwartungswert 100 Tage haben. Genau 100 Tage nach dem Beginn der Beobachtung kehren wir in den Raum zurück und untersuchen, ob die Birnen schon ausgebrannt sind.

- (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die linke Glühbirne noch funktionsfähig (also nicht ausgebrannt) ist?
- (b) Die diskreten Zufallsvariablen X und Y werden folgenderweise definiert: sei $X = 1$ falls die linke Birne ausgebrannt ist und $X = -1$ ansonsten, sei weiter $Y = 0$ falls die rechte Birne ausgebrannt ist und $Y = 3$ sonst. Bestimmen wir den Wert von $\text{cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Megoldás:

(a) (9 pont)

(1 pont) A bal oldali villanykörte hátralévő élettartamát leíró valószínűségi változókat jelöljük T -vel, a jobb oldaliét pedig U -val. (Nem baj, ha nem vezet be erre külön jelölést, de ha ezt nem teszi meg és később van ezzel összefüggésbe hozható szintaktikai hiba vagy jelölési következetlenség, akkor ez a pont nem jár.)

(1 pont) Ekkor T és U (független) exponenciális eloszlású valószínűségi változók^b,

(1 pont) mivel eloszlásuk folytonos és örökifjú (és így csak exponenciális lehet).

(1 pont) Ha az eloszlás paramétere λ , akkor a valószínűségi változó várható értéke $1/\lambda$,

(1 pont) ezért $\lambda = 1/100$.

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(T \geq 100)$ (vagy: $\mathbb{P}(T > 100)$ -zal is OK, a későbbiekben is hasonlóan, és a folytonosságra nem kell külön hivatkozni, azaz $\mathbb{P}(T > 100) = 1 - \mathbb{P}(T < 100)$ alkalmazása indoklás nélkül is OK pontlevonás nélkül)

(2 pont) $= 1 - \mathbb{P}(T < 100) = e^{-1/100 \cdot 100}$ (a két lépés összevonható; nem baj, ha a hallgató tudja, hogy $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$)

(1 pont) $= e^{-1} (\approx 0,3679)$.

(b) (11 pont)

1. megoldás.

^bAz (a) rész megoldásához U -t egyáltalán nem kell megemlíteni. Viszont ha soha nem említi meg, hogy U ugyanolyen eloszlású, mint amit T -re kimond, csak használja, akkor a (b)-ben 1 pont levonás (feltéve, hogy egyáltalán írt valamit a (b)-hez, ami U -ra vonatkozik).

(1 pont) $\text{cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$ (tehát elég $\mathbb{E}(XY)$ -t meghatározni). (Ha valaki kiszámolja $\text{cov}(X, Y)$ -t és $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ -t, az is jó, de $\mathbb{E}(XY)$ kiszámításán felül minden másra összesen csak 1 pont jár. $\mathbb{E}(X) = 1 - 2e^{-1}$, $\mathbb{E}(Y) = 3e^{-1}$.)

(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = \sum_{XY \in \text{Ran}(XY)} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y)$

(1 pont) $= -3\mathbb{P}(T \geq 100, U \geq 100) + 3\mathbb{P}(T < 100, U \geq 100)$ (lehet persze metszetekkel is írni. Az előző lépéssel akkor vonható össze, ha kiderül, hogy a 3 és a -3 honnan származik. Az $XY = 0$ -hoz tartozó valószínűségeket nem kötelező felírni, kiszámolni meg pláne nem.).

(2 pont) $\mathbb{P}(T \geq 100, U \geq 100) = \mathbb{P}(T \geq 100)\mathbb{P}(U \geq 100) = \mathbb{P}(T \geq 100)^2$ (összevonható egy lépésbe),

(1+1 pont) mert függetlenek és azonos eloszlásúak (utóbbit szabad kevésbé formálisan is megfogalmazni).

(1 pont) $= (e^{-1})^2 = e^{-2} \approx 0,1353$ (elég csak a szimbolikus vagy csak a numerikus eredmény).

(1 pont) $\mathbb{P}(T < 100, U \geq 100) = \mathbb{P}(T < 100)\mathbb{P}(U \geq 100)$ (mert függetlenek, de ezt az indoklást elég, ha egyszer írja oda; ha csak itt és a másiknál nem, akkor jár a fenti 1 pont)

(1 pont) $= (1 - e^{-1})e^{-1}$ (nem kell jobban indokolni)
 $= e^{-1} - e^{-2} \approx 0,2325$ (elég csak a szimbolikus eredmény bármelyik formában vagy csak a numerikus eredmény).

(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(XY) = -3e^{-2} + 3(e^{-1} - e^{-2}) = 3e^{-1} - 6e^{-2} \approx 0,2916$ (elég csak a szimbolikus vagy csak a numerikus eredmény).

2. (elegánsabb, de több ötletet igénylő) megoldás vázlata.

(1 pont) $\text{cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$ (tehát elég $\mathbb{E}(XY)$ -t meghatározni).

(1 pont) Mivel T és U független, X és Y is független,

(1 pont) és ezért $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. (Arra is jó hivatkozni is, hogy mivel függetlenek, a kovarianciájuk 0.)

(1 pont) Továbbá $\mathbb{E}(X) = 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) + (-1) \cdot \mathbb{P}(X = -1)$

(1 pont) $= \mathbb{P}(T < 1) - \mathbb{P}(T \geq 1)$ (az előző lépéssel összevonható)

(1 pont) $= 1 - e^{-1} - (e^{-1})$

(1 pont) $= 1 - 2e^{-1} (\approx 0,2642)$,

(1 pont) és $\mathbb{E}(Y) = (0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + 3 \cdot \mathbb{P}(Y = 3))$

(1 pont) $= 3 \cdot \mathbb{P}(U \geq 1)$

(1 pont) $= 3e^{-1} \approx 1,1036$,

(1 pont) tehát $\mathbb{E}(XY) = 6e^{-2} - 3e^{-1} = 0,2916$.

5. Die Dichtefunktion des Zufallsvektors (X, Y) ist durch

$$f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{X,Y}(s, t) = \begin{cases} 1/4, & \text{falls } 1 < s < 3 \text{ und } 2 < t < 2s, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

angegeben.

(a) Bestimmen wir den Wert von $f_{Y|X}(t|s)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

(b) Zeigen wir, dass $\mathbb{E}[Y|X] = X + 1$ gilt.

(c) Berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \leq 2)$.

Megoldás:

(a) (10 pont)

(1 pont) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$,

(1 pont) ha $f_X(x) > 0$ (az $f_X(x) = 0$ esetre a megoldás során később visszatérünk).

(1 pont) Határozzuk meg először $f_X(x)$ -et, $f_X(x) = 0$, ha $x \leq 1$ vagy $x \geq 3$,

(1 pont) és ha $1 < x < 3$, akkor $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$

(1 pont) $= \int_2^{2x} \frac{1}{4}dy$ (az előző lépéssel összevonható, elég, ha az utóbbi képlet szerepel, de az fontos, hogy $1 < x < 3$)

(1 pont) $\left[\frac{1}{4}y\right]_{y=2}^{y=2x}$

(1 pont) $= x/2 - 1/2$.

(1 pont) Tehát ha $1 < x < 3$ (vagy: ha $f_X(x) > 0$), akkor: ha $2 < y < 2x$, akkor $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1/4}{x/2 - 1/2} = \frac{1}{2x-2}$,

(1 pont) ha pedig $y \leq 2$ vagy $y \geq 2$, akkor $f_{Y|X}(y|x) = 0$.

(1 pont) Továbbá $f_{Y|X}(y|x) = 0$ (minden y -ra, de nem baj, ha ezt nem hangsúlyozza), ha $f_X(x) = 0$, azaz ha $x \leq 1$ vagy $x \geq 3$.

(b) (6 pont)

(1 pont) A regressziós függvény $\mathbb{E}[Y|X = x] = g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy$ (a két jelölésből az egyik elég, és nem kell odaírni szöveggel, hogy regressziós függvény),

(1 pont) $= \int_2^{2x} \frac{y}{2x-2}dy$ (a két lépés összevonható, ha világos, hogy honnan jön az y és honnan az $1/(2x-2)$ mint szorzó)

(0 pont) $= \frac{1}{2x-2} \int_2^{2x} ydy$

(1 pont) $= \frac{1}{2x-2} [y^2/2]_{y=2}^{2x}$

(1 pont) $= \frac{1}{2x-2} (2x^2 - 1/2) = \frac{4x^2-4}{4x-4}$

(1 pont) $= \frac{(2x-2)(2x+2)}{4x-4} = \frac{2x+2}{2} = x + 1$.

(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(Y|X) (= g(X)) = X + 1$, amit bizonyítani kellett.

2. megoldás.

(1 pont) Az (a) feladat szerint $y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$ adott $1 < x < 3$ esetén konstans a $(2, 2x)$ intervallumon és különben 0 (ez az 1 pont akkor is jár, ha nem írja oda, hogy különben 0),

(2 pont) ezért feltéve, hogy $X = x$, Y egyenletes eloszlású a $(2, 2x)$ intervallumon (vagy még jobb: X ismeretében Y egyenletes eloszlású a $(2, 2X)$ intervallumon; ha ezt írja, akkor nem kell semmit x -szel leírni, csak X -szel),

(2 pont) tehát $\mathbb{E}[Y|X = x]$ (a $(2, 2x)$ intervallum középpontjával, azaz) $\frac{2+2x}{2} = x + 1$ -gyel egyenlő,

(1 pont) így $\mathbb{E}[Y|X] = X + 1$.

Ha valami olyasmit ír a számolásokat kihagyva és az (a) eredményének felhasználása nélkül (vagy abban az esetben, ha az (a)-ra rossz megoldást kapott), hogy feltéve, hogy X ismeretében Y egyenletes eloszlású a $[2, 2X]$ intervallumon és ezért $\mathbb{E}[Y|X = x] = \frac{2+2x}{2} = x + 1$, arra lehet adni max. 3 pontot, és arra, hogy ebből $\mathbb{E}[Y|X] = X + 1$ is következik, jár még 1 pont. A maradék 2 pont akkor jár, ha ezt valahogy értelmesen megindokolja, pl. azt mondja, hogy mivel az együttes sűrűségfüggvény konstans azon a derékszögű háromszögön, ahol nem 0, adott $x \in (1, 3)$ esetén $y \mapsto f_{Y|X}(y|x)$ is konstans $(2, 2x)$ -en (itt nemcsak az fontos, hogy konstans, hanem hogy hol).

(c) (4 pont)

1. megoldás.

(1+1 pont) Felhasználva, hogy f_X -et már meghatároztuk (ezt nem muszáj odaírni), $\mathbb{P}(X < 2) = \int_{-\infty}^2 f_X(x)dx = \int_1^2 \frac{x}{2} - \frac{1}{2}dx$ (a két lépés összevonható, elég, ha a második kifejezés szerepel)

(1 pont) $= \left[x^2/4 - \frac{x}{2}\right]_1^2$

(1 pont) $= 4/4 - 2/2 - 1/4 + 1/2$

(0 pont) $= 1/4$.

2. *megoldás*: klasszikus együttes sűrűségfüggvényes számolással. Itt az erőfeszítések mértékéhez képest sajnos viszonylag kevés pont jár.

(1 pont) $\mathbb{P}(X < 2) (= \mathbb{P}(1 < X < 2, 2 < Y < 2X)) = \int_1^2 \frac{1}{4} dy dx$ (ez a két lépés összevonható és elég, ha a második kifejezés szerepel, viszont ha a második nincs meg, de az első még helyes, arra jár egy pont)

$$(1 \text{ pont}) = \int_1^2 \left[\frac{1}{4} y \right]_{y=2}^{2x} dx$$

$$(1 \text{ pont}) = \int_1^2 \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$(1 \text{ pont}) = \left[\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x \right]_{x=1}^2$$

$$(0 \text{ pont}) = \frac{4-4-1+2}{4} = \frac{1}{4}.$$

3. *megoldás*: geometriai valószínűségi mezővel. Szintén

(1 pont) Az (X, Y) véletlen pont választása megegyezik egy (egyenletes) véletlen pont választásával az

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x < 3, 2 < y < 2x\}$$

derékszögű háromszögben. (Ehelyett a formális leírás helyett jó egy helyes, értelmezhető ábra is. Ezért az 1 pontért nem kell indokolni; az indoklás az, hogy a sűrűségfüggvény pont ezen a háromszögön konstans és nem 0, mindenhol máshol pedig 0.)

(1 pont) (Ez az Ω eseménytér,) ennek a területe 4.

(1 pont) A kedvező terület ennek a háromszögnek az $x = 2$ egyenestől balra eső része. Ez egy (az Ω -val hasonló) derékszögű háromszög, amelynek az oldalhosszai 1 és 2, tehát a területe 1.

(1 pont) Így a geometriai valószínűségi mező képlete szerint a keresett valószínűség a kedvező és az összes terület hányadosa, vagyis $1/4$.

*6. Sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ eine (einfache) Stichprobe vom Umfang n , für die $X_i \sim U(0; \vartheta)$ für einen unbekannten Parameter $\vartheta > 0$ gilt.

(a) Bestimmen wir den Wert der Likelihood-Funktion $L_\vartheta(x_1, \dots, x_n)$ für alle Realisierungen der Stichprobe und für alle $\vartheta > 0$.

(b) Geben wir die Maximum-Likelihood-Schätzung (aufgrund der Stichprobe) für ϑ an.

Megoldás:

Ez a példa nagyon hasonló a jegyzetkiegészítésben szereplő 14.2.10. Példához.

(a) (8 pont)

(3+1 pont) (Az egyenletes eloszlás tulajdonságai miatt) az f_ϑ sűrűségfüggvény

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta}, & \text{ha } x \in (0, \vartheta), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(Az 1. sorban 1 pont a képletre, 1–1 a határokra, 1 pont a 2. sorra.)

(3+1 pont) Így a likelihood-függvény $(X_1, \dots, X_n)$ bármely $(x_1, \dots, x_n)$ realizációja esetén

$$L_\vartheta(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta^n}, & \text{ha } x_1, x_2, \dots, x_n \in (0, \vartheta), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(Az 1. sorban 1 pont a képletre, összesen 1 pont a határokra, ami csak akkor jár, ha tökéletes, és 1 pont arra, hogy az összes x_i ebbe az intervallumba esik. 1 pont a 2. sorra.)

(b) (12 pont)

(3 pont) Az intervallum hosszát mindaddig csökkenthetjük (és ezzel a likelihood-függvényt növelhetjük), amíg az $(x_1, \dots, x_n)$ az $(X_1, \dots, X_n)$ egy realizációja marad,

(2 pont) azaz amíg

$$\max\{x_1, \dots, x_n\} < \vartheta.$$

(3 pont) Így a likelihood-függvény éppen abban a határesetben lesz maximális, amikor $\max\{x_1, \dots, x_n\} = \vartheta$. (Ha ezt máshogy jól megindokolja, akkor is jár az előbbi 3+2 pont is.) (Ebben az esetben $(x_1, \dots, x_n)$ már éppen nem realizáció, de bármely $\vartheta > \max\{x_1, \dots, x_n\}$ esetén igen – ezt nem kell odaírni.)

(2 pont) Ezért az $(x_1, \dots, x_n)$ realizációhoz tartozó maximum likelihood becslésünk

$$\vartheta_*(x_1, \dots, x_n) = \max\{x_1, \dots, x_n\},$$

(2 pont) a maximum likelihood becslésünk pedig

$$\vartheta_*(X_1, \dots, X_n) = \max\{X_1, \dots, X_n\} = X_n^*.$$

(Az X_n^* jelölést nem szükséges használni, de ha használja, akkor az elég önmagában is.)

További megjegyzések a javításhoz:

- Ha a maximumot összekeveri a minimummal vagy az előjeleket rontja el, akkor összesen 2-2 pont levonás.
- Ha arra hivatkozik, hogy ez ugyanaz, mint a jegyzetkiegészítésbeli példa, és emiatt mindent -1 -szer kell venni és a $-\min$ helyett $\max$ lesz, arra önmagában is jár a b)-ben 6 pont. A teljes pontszám akkor jár, ha helyesen leírja, hogy az $x \mapsto -x$ transzformáció hogyan hat a likelihood-függvényre.
- Ha a b)-ben log-likelihood-függvényes módszerrel próbálkozik, akkor a log-likelihood-függvény helyes levezetéséért 2 pont jár, ϑ szerinti parciális deriválására szintén 2 pont. Annak megállapítására, hogy a deriválnak sehol nincs zérushelye ott, ahol $(x_1, \dots, x_n)$ realizáció, jár 3 pont. További 3 pont jár arra, ha megnézi a határokat és úgy megtalálja a helyes likelihood becslést adott realizáció esetén, végül 2 pont jár a maximum likelihood becslés megadására. (A log-likelihood függvényt nem muszáj meghatározni, lehet a likelihood-függvényt közvetlenül deriválni, amire jár összesen 4 pont, onnan pedig a pontozás a log-likelihood-függvényes módszerhez hasonlóan megy tovább a derivált zérushelyeinek elemzésével.) Ez a megoldás igen munkaigényes a javasolt megoldáshoz képest, és végeredményben csak az indoklást helyettesíti a log-likelihood-függvényes módszer, magát a megoldást ugyanúgy kell levezetni, mint a javasolt módszer esetén.