

3. Prüfung

Allgemeine Regeln: Die Prüfung dauert 100 Minuten. Die Benutzung eines (nicht graphischen) Taschenrechners ist erlaubt. Numerische Ergebnisse müssen auf 4 Dezimalstellen gerundet werden. Zum Erreichen der maximalen Punktzahl ist es notwendig, detaillierte Lösungen zu geben und die angewandten Behauptungen, Sätze und Eigenschaften aufzulisten. Es ist verboten, während der ersten 30 Minuten den Raum zu verlassen.

1. (a) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ Ereignisse ($n \geq 1$). Welche Bedingungen müssen diese Ereignisse nach Definition erfüllen, um ein *vollständiges Ereignissystem* zu bilden?
(b) Was bedeutet nach Definition, dass eine Zufallsvariable *einfach* ist?
(c) Seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $\sigma > 0$, und nehmen wir an, dass $Y \sim N(\mu; \sigma^2)$ eine normalverteilte Zufallsvariable ist. Sei noch $X \sim N(0; 1)$ eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Geben wir eine Transformierte von X an, deren Verteilung mit der Verteilung von Y übereinstimmt.
2. Nehmen wir an, dass die Ereignisse A , B und C paarweise unabhängig sind, und die Gleichungen $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{10}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}$, $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{10}$ gelten. Wir wissen auch, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keines der obigen Ereignisse eintritt, $1/2$ ist. Entscheiden wir, ob A , B und C gemeinsam unabhängig sind. Angenommen, dass mindestens eines der Ereignisse A , B und C eintritt, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle von ihnen (simultan) eintreten?
3. Seien $X \sim N(1; 9)$ und $Y \sim N(-1; 16)$ unabhängige und normalverteilte Zufallsvariablen.
(a) Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(2 < X < 3)$.
(b) Seien $Z = X + Y + 2024$ und $W = Y - 2X$. Berechnen wir den Wert von $\text{cov}(Z, W)$.
(c) Bestimmen wir den Erwartungswert und die Varianz von $X + Y$.

Begründen wir die Richtigkeit der Rechnungen!

4. Wir beobachten zwei Glühbirnen, die nebeneinander an der Decke eines Raumes hängen. Am Anfang unserer Beobachtung sind beide Birnen noch betriebsbereit. Die verbleibenden Zeitdauern bis zum Ausbrennen der einzelnen Birnen werden durch zwei unabhängige absolut stetige und gedächtnislose Zufallsvariablen beschrieben, die beide den Erwartungswert 100 Tage haben. Genau 100 Tage nach dem Beginn der Beobachtung kehren wir in den Raum zurück und untersuchen, ob die Birnen schon ausgebrannt sind.
(a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die linke Glühbirne noch funktionsfähig (also nicht ausgebrannt) ist?
(b) Die diskreten Zufallsvariablen X und Y werden folgenderweise definiert: sei $X = 1$ falls die linke Birne ausgebrannt ist und $X = -1$ ansonsten, sei weiter $Y = 0$ falls die rechte Birne ausgebrannt ist und $Y = 3$ sonst. Bestimmen wir den Wert von $\text{cov}(X, Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.
5. Die Dichtefunktion des Zufallsvektors (X, Y) ist durch

$$f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{X,Y}(s, t) = \begin{cases} 1/4, & \text{falls } 1 < s < 3 \text{ und } 2 < t < 2s, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

angegeben.

- (a) Bestimmen wir den Wert von $f_{Y|X}(t|s)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.
(b) Zeigen wir, dass $\mathbb{E}[Y|X] = X + 1$ gilt.
(c) Berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \leq 2)$.
- *6. Sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ eine (einfache) Stichprobe vom Umfang n , für die $X_i \sim U(0; \vartheta)$ für einen unbekannten Parameter $\vartheta > 0$ gilt.
(a) Bestimmen wir den Wert der Likelihood-Funktion $L_\vartheta(x_1, \dots, x_n)$ für alle Realisierungen der Stichprobe und für alle $\vartheta > 0$.
(b) Geben wir die Maximum-Likelihood-Schätzung (aufgrund der Stichprobe) für ϑ an.

Verteilung	Notation	$\text{ran} X$	$F_X(t)$	$f_X(k), f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0, 1\}$		$1 - p, p$	p	$p(1 - p)$
Binomialverteilung	$\text{Bin}(n; p)$	$\{0, 1, \dots, n\}$		$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$	np	$np(1 - p)$
Poisson-Verteilung	$\text{Poi}(\lambda)$	$\mathbb{N}$		$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
geometrische Verteilung	$\text{Geo}(p)$	$\mathbb{N}^+$		$(1 - p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
uniforme Verteilung	$\text{U}(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentialverteilung	$\text{Exp}(\lambda)$	$[0; \infty)$	$1 - e^{-\lambda t} \ (0 \leq t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normalverteilung	$\text{N}(\mu; \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
n -dim. Normalverteilung	$\text{N}(\underline{\mu}; \Sigma)$	$\mathbb{R}^n$	$f_{\underline{X}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\underline{t}-\underline{\mu})^T \Sigma^{-1}(\underline{t}-\underline{\mu})}$		$\underline{\mu}$	Σ

Standardnormalverteilungstabelle

[illegible]