

2. Prüfung

Lösungen

1. Geben wir die folgenden Definitionen an:

- (a) Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.
- i. Seien $A, B \in \mathcal{F}$ Ereignisse. Was bedeutet nach Definition, dass A und B *unabhängig* sind?
 - ii. Seien X und Y auf Ω definierte Zufallsvariablen. Was bedeutet nach Definition, dass X und Y *unabhängig* sind? (Zur Antwort dieser Frage müssen die im Teil i. definierten Begriffe nicht wieder definiert werden.)
- (b) Sei $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ eine Folge von Zufallsvariablen und sei noch Z eine Zufallsvariable. Was bedeutet nach Definition, dass die obige Folge gegen Z *in Verteilung konvergiert*?

Megolds:

(a) (sszesen 10 pont)

i. (4 pont)

A és B (pontosan) akkor függetlenek, ha $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$.

Ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ -t vagy $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$ -t ír, akkor 2 pont, ha hozzáírja, hogy a feltétel valószínűsége pozitív kell, hogy legyen, akkor még 1 pont.

ii.

(4 pont) X és Y (pontosan) akkor függetlenek, ha az $\{X \leq s\}$ és az $\{Y \leq t\}$ események függetlenek (az is jó, ha azt írja, hogy $\mathbb{P}(X \leq s, Y \leq t) = \mathbb{P}(X \leq s)\mathbb{P}(Y \leq t)$)

(2 pont) minden $s, t \in \mathbb{R}$ esetén.

(b) (sszesen 10 pont)

(2 pont) Jelölje F_{X_i} ill. F_Z az X_i és Z változók eloszlásfüggvényét.

(5 pont) X_n akkor konvergál eloszlásban Z -hez (amint $n \rightarrow \infty$), ha $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(t) = F_Z(t)$ teljesül

(3 pont) minden olyan $t \in \mathbb{R}$ esetén, ahol F_Z folytonos. (Ha azt írja, hogy minden $t \in \mathbb{R}$ -re, azért 1 pont jár a 3-ból.)

2. Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y ist in der folgenden Tabelle angegeben.

$Y \backslash X$	1	2
0	1/3	1/6
1	1/12	1/4
2	1/12	1/12

Berechnen wir die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten von X und Y , und bestimmen wir die Regressionsgerade von Y auf X .

Megoldás:

(1 pont) $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$,

(1 pont) ahol $\mathbb{E}(XY) = \sum_{k \in \text{Ran}(XY)} k \cdot \mathbb{P}(XY = k)$ (ha a következő lépés jó, akkor ez a pont jár az általános képlet feltntetése nélkül is)

(1 pont) $= \frac{1}{12} \cdot 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right) \cdot 2 + \frac{1}{12} \cdot 4 = \frac{13}{12}$,

(1 pont) valamint mivel $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/2$ (ezt persze táblázatosan is fel lehet tüntetni),

(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2) = \frac{3}{2}$,

(1 pont) és mivel $\mathbb{P}(Y = 1) = 1/3$ és $\mathbb{P}(Y = 2) = 1/6$ (és így $\mathbb{P}(Y = 0) = 1/2$, de ezt nem muszáj odaírni, mert a várható érték és szrs kiszámításához gysem kell),

(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{2}{3}$,

(1 pont) tehát $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{12}$.

(1 pont) $\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}$,

(1 pont) ahol $\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$ és Y esetén hasonlóan (de ha csak az egyiket írja oda, azért ne vonjunk le pontot),

(1 pont) és $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}(1^2 + 2^2) = \frac{5}{2}$,

(1 pont) tehát $\mathbb{D}(X) = \sqrt{5/2 - (3/2)^2} = \sqrt{1/4} = 1/2$,

(1 pont) valamint $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{3} \cdot 1^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 = 1$,

(1 pont) így $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{1 - (2/3)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

(1 pont) emiatt $\text{corr}(X, Y) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \approx 0,2236$ (a tört alakú és a numerikus végeredmény közül elég, ha az egyiket írja ki).

(1 pont) A regressziós egyenes képlete $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = \beta x + \alpha\}$,

(1+1 pont) ahol $\beta = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\mathbb{D}^2(X)} = \frac{\frac{1}{12}}{1/4} = \frac{1}{3}$

(1+1 pont) és $\alpha = \mathbb{E}(Y) - \beta\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$.

3. Die Verteilungsfunktion einer absolut stetigen Zufallsvariablen ist durch

$$F_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 1, \\ \ln t, & \text{falls } 1 < t < e, \\ 1, & \text{falls } t \geq e \end{cases}$$

angegeben, wo $e \approx 2,71 \dots$ die Basis des natürlichen Logarithmus ist.

(a) Bestimmen wir den Erwartungswert und die Varianz von X .

(b) 100 (gemeinsam) unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit der obigen Verteilungsfunktion werden durch einen Computer simuliert. Schätzen wir durch eine geeignete Approximation die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe dieser 100 Variablen höchstens 180 ist. (Die Bestimmung des genauen Wertes der Wahrscheinlichkeit wird in dieser Aufgabe nicht bewertet.)

Bemerkung: Statt symbolischer Werte können die (gerundete) numerische Werte der in Teil (a) bestimmten Ergebnisse in Teil (b) benutzt werden.

Megoldás:

(a) (összesen 8 pont)

(1 pont) $f_X(t) = \frac{1}{t}$, ha $1 < t < e$

(1 pont) és $f_X(t) = 0$ különben,

(1 pont) tehát $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = \int_1^e 1 dt$ (elég, ha a második képlet szerepel)

(1 pont) $= [t]_1^e = e - 1 (\approx 1,7183)$.

(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$,

(1 pont) ahol $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_X(t) dt = \int_1^e t dt$

(1 pont) $= [t^2/2]_1^e = \frac{e^2-1}{2} (\approx 3,1945)$.

(1 pont) Tehát $\mathbb{D}^2(X) = \frac{e^2-1}{2} - (e-1)^2 \approx 0,2420$. (Nem baj, ha itt nem szerepel numerikus eredmény, de előbb-utóbb hiányozni fog.)

(b) (összesen 12 pont)

(1 pont) arra az ötletre, hogy a CHT-t kellene használni. Ez jár akkor is, ha ez a későbbiekben nem sikerül, feltéve, hogy kiderül, hogy az általános CHT-ról és nem a de Moivre-Laplace-tételről van szó.

(1 pont) Jelölje $X_1, \dots, X_{100}$ a szimulált valószínűségi változókat, ekkor a keresett valószínűség

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 180\right).$$

(5 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \leq 180\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{100}\mathbb{D}(X_1)} \leq \frac{180 - 100\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{100}\mathbb{D}(X_1)}\right) \approx \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 171,8282}{4,9197} \leq 1,6610\right)$$

(Ebből 3 pont a középső lépés, 2 pont az utolsó, amiből 1 az, hogy a szórásnégyzetből gyököt vonva kiszámolja a szórást.) (Kisebb kerekítési hibákért, ha pl. már az (a) részben kiszámolta a várható értéket és a szórásnégyzetet és most a négy tizedesjegyre kerekített értékekkel számol, ne vonjunk le pontot. Ha a középső kifejezés nincs ott szimbolikusan, de ott van $\mathbb{E}(X_1)$ és $\mathbb{D}(X_1)$ már ismert értékeivel, az is jó, és a két lépés össze is vonható, ha kiderül, hogy mi micsoda. Ha a jobb oldalon csak szimbolikus értékek szerepelnek, azért ne vonjunk le pontot, de mint már említettem, a numerikus eredmények előbb-utóbb hiányozni fognak.)

(2 pont) $\approx \mathbb{P}(Y \leq 1,6610)$, ahol $Y \sim N(0; 1)$,

(1+1 pont) és $\mathbb{P}(Y \leq 1,6610) (= \Phi(1,6610)) \approx \Phi(1,66)$ (nem muszáj használni a Φ jelölést, jó a $\mathbb{P}(Y \leq 1,66)$ is)

(1 pont) $\approx 0,9515$.

4. Die Dichtefunktion des Zufallsvektors (X, Y) ist durch

$$f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_{X,Y}(s, t) = \begin{cases} c, & \text{falls } 0 < t < 1 \text{ und } 0 < s < t, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

angegeben, wo $c > 0$ eine geeignete reelle Zahl ist.

(a) Bestimmen wir den Wert von c .

(b) Geben wir die Dichtefunktionen f_X bzw. f_Y der Zufallsvariablen X bzw. Y an.

(c) Sind X und Y unabhängig? Sind X und Y identisch verteilt?

Megoldás:

(a) (összesen 5 pont)

(1 pont) $f_{X,Y}$ akkor lesz együttes sűrűségfüggvény, ha (c nemnegatív – ez meg van adva, ezért nem jár rá pont – és) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, t) ds dt$

(1 pont) $= \int_0^1 \int_0^t c ds dt$ (ha ez jó, akkor az előző pontot az előző képlet hiányában is megadjuk)

(1 pont) $= c \int_0^1 [s]_{s=0}^t dt = c \int_0^1 t dt$

(1 pont) $= c[t^2/2]_{t=0}^1 = c/2$,

(1 pont) amiből $c = 2$.

Alternatív megoldás: a geometriai valószínűségi mezővel érvelünk. A sűrűségfüggvény konstans azon a tartományon, ahol nem 0. Ez a tartomány pedig az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 < x < y < 1\}$ derékszögű egyenlőszárú háromszög, vagyis az egységnégyzet $y = x$ szögfelező-egyenes feletti fele, amelynek amelynek területe $1/2$. Az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó 1 valószínűséggel ebbe a tartományba esik, és itt a valószínűség a területtel arányos (mert a sűrűségfüggvény konstans), ami azt jelenti, hogy c -szer a háromszög területe éppen 1, vagyis $c = 2$. (5 pont, indoklás szükséges, de ha lényegében helyes, csak nem elég precíz, akkor ne vonjunk le túl sok pontot.)

(b) (összesen 8 pont)

(1 pont) Ha $0 < s < 1$, akkor $f_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, t) dt$

(1 pont) $= \int_s^1 2 dt$ (ha ez jó, akkor az előző pontot az előző képlet hiányában is megadjuk)

$$(1 \text{ pont}) = \left[2t \right]_{t=s}^1 = 2 - 2s,$$

(1 pont) és ha $s \leq 0$ vagy $s \geq 1$, akkor $f_X(s) = 0$,

(1 pont) valamint ha $0 < t < 1$, akkor $f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s, t) ds$

(1 pont) $= \int_0^t 2 ds$ (ha ez jó, akkor az előző pontot az előző képlet hiányában is megadjuk)

$$(1 \text{ pont}) = \left[2s \right]_{s=0}^t = 2t,$$

(1 pont) és ha $t \leq 0$ vagy $t \geq 1$, akkor $f_Y(t) = 0$.

(c) (összesen 7 pont)

Önmagában arra a kijelentésre, hogy nem függetlenek, nem jár pont.

(1 pont) Nem függetlenek, mert... (valahogy megindokolja, akkor is, ha rosszul).

(2 pont) X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $f_X(s)f_Y(t) = f_{X,Y}(s, t)$ minden $s, t \in \mathbb{R}$ esetén teljesül (ha kihagyja, hogy minden $s, t \in \mathbb{R}$ esetén, akkor max. 1 pont).

(2 pont) arra, hogy választ egy olyan s és egy olyan t értéket, amelyre $f_X(s)f_Y(t) \neq f_{X,Y}(s, t)$, pl. $s = t = 1/4$.

(1 pont) arra az ötletre, hogy pontosan akkor lennének azonos eloszlásúak, ha ugyanaz lenne a sűrűségfüggvényük (mivel mindkét peremeloszlás folytonos, de ezt nem kell odaírni. Szabad az eloszlásfüggvényeket is kiszámolni és az alapján következtetni, de fölösleges),

(1 pont) arra, hogy ez itt nem teljesül, ezért nem azonos eloszlásúak. (Ezt nem kell részletezni, de $t \in (0, 1) \setminus \{1/2\}$ esetén $f_X(t) \neq f_Y(t)$. Az utolsó két pont természetesen összevonható.)

5. In einer tropischen Höhle ist die Temperatur das ganze Jahr über fast konstant. Die Temperatur wurde in 6 verschiedenen Zeitpunkten gemessen, und die folgende Werte (in Grad Celsius angegeben) wurden erhalten:

$$x_1 = 18,6 \quad x_2 = 18,0 \quad x_3 = 19,2 \quad x_4 = 17,4 \quad x_5 = 16,8 \quad x_6 = 18,0.$$

Der Datenvektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_6)$ wird als Realisierung einer einfachen Stichprobe $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_6)$ betrachtet, deren Stichprobenvariablen die Verteilung $N(\mu; 4)$ haben, wo der Erwartungswert μ unbekannt ist.

- Geben wir ein Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 97% für den Parameter μ aufgrund des obigen Datenvektors an.
- In einem alten Geographielehrbuch steht die Behauptung $\mu = 17,5$ °C. Es wurde vermutet, dass diese Behauptung wegen des Klimawandels nicht mehr haltbar sei. Konstruieren wir einen Hypothesentest zum Fehlniveau 5%, um zu entscheiden, ob die Behauptung gilt. Stellen wir eine der Situation entsprechende Nullhypothese H_0 und die zugehörige Alternativhypothese H_1 auf, berechnen wir den Wert der Teststatistik. Entscheiden wir, ob H_0 angenommen oder verworfen werden muss, und begründen wir die Entscheidung.

Megoldás:

(a) (összesen 9 pont)

(1 pont) arra, hogy mivel a szórás ismert, az ismert szóráshoz tartozó (a képletgyűjteményben az u -próbánál szereplő) képletet használjuk a konfidenciaintervallumra. Elég, ha ez impliciten derül ki.

(1 pont) $n = 6$ és $\varepsilon = 0,03$ (elég, ha ezek is csak impliciten derülnek ki a későbbiekben),

$$(1 \text{ pont}) \quad \bar{x}_6 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i$$

$$(1 \text{ pont}) = 18,$$

$$(1 \text{ pont}) \text{ és } \sigma = \sqrt{4} = 2.$$

$$(1 \text{ pont}) \quad u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2) = \Phi^{-1}(0,985)$$

$$(1 \text{ pont}) \approx 2,17 \text{ (a normális eloszlás táblázata alapján).}$$

(2 pont) Így a konfidenciaintervallum

$$\left[\bar{x}_n - \frac{\sigma u_{\varepsilon/2}}{\sqrt{n}}; \bar{x}_n + \frac{\sigma u_{\varepsilon/2}}{\sqrt{n}} \right] = \left[18 - \frac{2 \cdot 2,17}{\sqrt{6}}; 18 + \frac{2 \cdot 2,17}{\sqrt{6}} \right] \approx [16,2282; 19,7718]$$

(itt csak a számolásra, illetve a végeredményekre jár pont, mert arra már adtunk pontot, hogy melyik képletet kell használni).

(b) (összesen 11 pont)

(1 pont) ismét jár arra, hogy mivel a szórás ismert, u -próbát kell használni, és a próba egymintás, (elég, ha ez később impliciten derül ki).

(2 pont) arra, hogy kétoldali próbára van szükség (ez a földrajztankönyvben szereplő állításból következik). Ezt nem kell expliciten kimondani, ha jó a nullhipotézis.

Ha ezt elrontja a hallgató, akkor ezt a két pontot elveszti, illetve az alternatíva lentebbi értékelésénél a $H_0: \mu \leq 17,5$ vs. $H_1: \mu > 17,5$ alternatívára maximum 1 pont jár, a $H_0: \mu \geq 17,5$ vs. $H_1: \mu < 17,5$ alternatívára pedig nem jár pont. Ezután viszont a továbbiakban úgy értékeljük a megoldást, mintha az alternatíva helyes lenne (feltéve, hogy szintaktikailag értelmezhető), tehát az adott egyoldali alternatívának megfelelően az $1 - \varepsilon$ -kvantilis egyszerese, illetve -1 -szerese a helyes és azzal kell összehasonlítani az u -statisztikát és az alapján dönteni.

(2 pont) Tehát az alternatíva $H_0: \mu = 17,5$ vs. $H_1: \mu \neq 17,5$ (itt μ jelöli a mintaelemek várható értékét, de ezt nem muszáj odaírni).

(1 pont) (Mivel egymintás u -próbáról van szó), a próbastatisztika értéke $u(x_1, \dots, x_6) = \frac{\bar{x}_n - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$ (elég, ha ez impliciten derül ki a következő lépésből. Ha csak u -t ír $u(x_1, \dots, x_6)$ helyett, azért ne vonjunk le pontot, mert a táblázatban is az van)

(1 pont) $= \frac{18-17,5}{2} \sqrt{6} \approx 0,6124$.

(1 pont) H_0 -t pontosan akkor fogadjuk el, ha $|u(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)| \leq u_{\varepsilon/2} = \Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2)$,

(1 pont) ahol ε a terjedelem (Fehlerniveau), vagyis 0,05, tehát $\Phi^{-1}(1 - \varepsilon/2) = \Phi^{-1}(0,975)$

(1 pont) $\approx 1,96$.

(1 pont) Ezért H_0 -t elfogadjuk (vagyis arra jutunk, hogy a várható érték [még] $17,5$ °C-kal egyenlőnek tekinthető).

*6. Sei $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ ein zweidimensionaler nicht singular normalverteilter Zufallsvektor mit Erwartungswertvektor $\begin{pmatrix} 42 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nehmen wir an, dass $\mathbb{E}(Y|X) = X + d$ gilt, wo d eine geeignete reelle Konstante ist.

(a) Berechnen wir den Wert von d .

(b) Bestimmen wir die Regressionsgerade von Y auf X .

(c) Sind X und Y unabhängig?

(d) Ist die Kovarianzmatrix von $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix?

Bemerkung: Wenn der Wert von d im Teil (a) nicht bestimmt wird, so können die anderen Teilaufgaben auch parametrisch gelöst werden.

Megoldás:

(a) (összesen 6 pont)

(1 pont) A teljes várható érték tétele szerint

(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$

(1 pont) $= \mathbb{E}(X + d)$,

(1 pont) $= \mathbb{E}(X) + d$.

(1 pont) $= \mathbb{E}(X) + d = 42 + d$, aminek -1 -gyel kell megegyeznie (a megadott várható érték vektor alapján),

(1 pont) tehát $d = -43$.

Egy másik lehetséges megoldás:

(2 pont) Az előadáson tanultak szerint ha a két dimenziós normális eloszlás nem elfajuló, akkor a fenti regresszió megegyezik a lineáris regresszióval.

(2 pont) Ha tehát az Y -nak az X -re vett lineáris regressziója $\beta X + \alpha$, akkor $\beta = 1$

(2 pont) és $d = \alpha = \mathbb{E}(Y) - \beta \mathbb{E}(X) = -1 - 42 = -43$.

(b) (összesen 5 pont)

Ha az a) részben az első megoldás szerepelt:

(2 pont) arra, hogy nem elfajuló többdimenziós normális eloszlás esetén a regresszió megegyezik a lineáris regresszióval (ez a pont akkor is jár, ha a konkrét szituációra nem tudja megfelelően alkalmazni. A többdimenziós normalitásra viszont mindenképpen hivatkozni kell).

(1 pont) Ez azt jelenti, hogy $\mathbb{E}(Y|X) = \beta X + \alpha$, ahol β és α a lineáris regresszió képletében szereplő kifejezések (nem kell kiírni, hogy mi β és α képlete, de az valahogy derüljön ki, hogy a lineáris regressziónak felelnek meg).

(1 pont) Ezért $\beta = 1$ és $\alpha (= d) = -43$,

(1 pont) vagyis a regressziós egyenes $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x - 43\}$.

Ha az a) részben a második megoldás szerepelt:

(1 pont) Az Y -nak az X -re vett lineáris regressziója $X - 43$,

(4 pont) vagyis a regressziós egyenes $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x - 43\}$.

(c) (összesen 4 pont)

(2 pont) arra, hogy ha X és Y függetlenek lennének, akkor $\mathbb{E}(Y|X)$ megegyezne $\mathbb{E}(Y)$ -nal.

(2 pont) Ez viszont itt nem teljesülhet, hiszen $\mathbb{E}(Y|X) = (X + d) = X - 43$, és X (vagy: $X - 43$) nem konstans valószínűségi változó (vagy: nem 1 valószínűséggel konstans) (mivel az eloszlás nemelfajuló, de nem várjuk el az erre való hivatkozást), míg $\mathbb{E}(Y) (= d = -43)$ egy konstans.

Egy másik lehetséges megoldás:

(1 pont) A lineáris regresszióban az X együttthatója nem 0,

(1 pont) ez az együtttható $\frac{\text{cov}(X, Y)}{\mathbb{D}^2(X)}$

(1 pont) tehát $\text{cov}(X, Y) \neq 0$,

(1 pont) így a két változó nem lehet független.

(d) (összesen 5 pont)

Ha a c) részben az első megoldás szerepel:

(1 pont) A kovarianciamátrix pontosan akkor diagonális, ha $\text{cov}(X, Y) = 0$.

(1 pont) ennek megindoklására (pl. kimondja a kovarianciamátrix definícióját, vagy azt mondja, hogy a kovarianciamátrix egy 2×2 -es szimmetrikus mátrix, amelyben a főátlón kívül mindkét helyen $\text{cov}(X, Y)$ áll).

(2 pont) Ha $\text{cov}(X, Y) = 0$ teljesülne (vagyis ha X és Y korrelálatlanok lennének; ha ezt írja, nem kell indokolni, hogy a korreláció létezik, de ez is abból következik, hogy az eloszlás nemelfajuló), akkor viszont függetlenek is lennének, mert $(X, Y)^T$ kétdimenziós (vagy: többdimenziós) normális eloszlású.

(1 pont) És mivel láttuk, hogy nem függetlenek, ezért korrelálatlanok sem lehetnek, tehát a kovarianciamátrix nem diagonális.

Az utolsó három pont úgy is megszerezhető, ha a c) részben látott indoklás szerepel itt.

Ha a c) részben a második megoldás szerepel:

(1 pont) A kovarianciamátrix pontosan akkor diagonális, ha $\text{cov}(X, Y) = 0$.

(1 pont) ennek indoklására

(3 pont) ez pedig a c) rész megoldása szerint nem igaz, tehát a kovarianciamátrix nem diagonális.