

1. Prüfung

Lösungen

1. Geben wir die folgenden Definitionen an:

- (a) Sei $k \in \mathbb{N}$, wenn und wie wird der k -te *Moment* einer diskreten Zufallsvariablen definiert? (Zwar bleibt die Definition auch im Allgemeinen gültig, aber es ist genug, sie nur für *diskrete* Variablen anzugeben.)
- (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ eine einfache Stichprobe, wo die Verteilung der Variablen durch einen Parameter $\vartheta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ bestimmt ist. Seien noch $\psi : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stichprobenfunktion. Was bedeutet (nach der in der Vorlesung angegebenen Definition), dass $T(\mathbf{X})$
 - (i) ein *erwartungstreuer Schätzer* von $\psi(\vartheta)$ ist?
 - (ii) ein *asymptotisch erwartungstreuer* Schätzer von $\psi(\vartheta)$ ist?

Bemerkung: Die Bezeichnungen $\mathbb{E}$ und $\mathbb{E}_\vartheta$ können wie in der Vorlesung benutzt werden, also müssen sie hier nicht definiert werden.

Megoldás:

(a) (10 pont)

(8 pont) X -nek a k -adik momentuma $\mathbb{E}(X^k)$

(2 pont) amennyiben ez a várható érték véges ($\iff \mathbb{E}(|X|^k) < \infty$). Az is elfogadható feltétel, hogy a várható érték definiált.

(b) (10 pont)

(i) A torzítatlanság akkor teljesül, ha

(4 pont) $\mathbb{E}_\vartheta(T(X_1, \dots, X_n)) = \psi(\vartheta)$

(1 pont) minden $\vartheta \in \Theta$ -ra.

(ii) Az aszimptotikus torzítatlanság akkor teljesül, ha

(4 pont) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_\vartheta(T(X_1, \dots, X_n)) = \psi(\vartheta)$

(1 pont) minden $\vartheta \in \Theta$ -ra.

Ha $\mathbb{E}_\vartheta$ helyett csak $\mathbb{E}$ -t ír, akkor a vonatkozó 4 pontból maximum 2 pont jár.

2. In einem imaginären Land stammen 70% der verkauften Streichhölzer von einem Unternehmen, das billige Streichhölzer herstellt, 1/3 davon sind unbenutzbar. Die restlichen 30% werden von einem anderen Unternehmen hergestellt, das teurere Streichhölzer herstellt, von denen im Durchschnitt jedes zehnte unbenutzbar ist.

- (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig gewähltes Streichholz, das in diesem Land verkauft wird, unbenutzbar ist?
- (b) Ein in diesem Land verkauftes Streichholz wird zufällig gewählt. Sei X die Zufallsvariable, die den Wert 1 annimmt, falls das gewählte Streichholz unbenutzbar ist, und den Wert 0 annimmt, falls es benutzbar ist. Sei weiter Y die Zufallsvariable, die den Wert 2 annimmt, falls das gewählte Streichholz von dem Unternehmen hergestellt wurde, das billige Streichhölzer herstellt, andernfalls sei der Wert von Y 1. Bestimmen wir die Varianz von X und die Kovarianz von X und Y .

Megoldás:

(a) (7 pont)

Jelöljük B -val azt az eseményt, hogy a kiválasztott gyufát az olcsóbb gyufákat gyártó cég gyártotta és T -vel azt az eseményt, hogy a drágább gyufákat gyártó cég gyártotta. Jelöljük továbbá U -val azt az eseményt, hogy a kiválasztott gyufa használhatatlan. (Nem szükséges persze ezekre az eseményekre jelölést bevezetni.)

(1 pont) arra, hogy legalább minimális indoklást ad arra, hogy a TVT feltételei teljesülnek (elég további magyarázat nélkül arra hivatkozni, hogy B és T teljes eseményrendszert alkotnak).

(1 pont) A teljes valószínűség tétele szerint

$$(2 \text{ pont}) \mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(U|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(U|T)\mathbb{P}(T)$$

$$(1+1 \text{ pont}) \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10}$$

$$(1 \text{ pont}) = \frac{79}{300} \text{ (jó tizedestört alakban, kerekítve is).}$$

(b) (13 pont)

$$(1 \text{ pont}) \mathbb{D}^2(X) = \frac{79}{300} \cdot \left(1 - \frac{79}{300}\right) = \frac{17459}{90000} = 0,1939\bar{8} \approx 0,1940 \text{ (jó végtelen szakaszos tizedestört alakban, kerekítve és közös nevezőes tört alakban is)}$$

(1 pont) ennek indoklása. Itt lehet arra kell hivatkozni, hogy X egy indikátorváltozó, ekkor ki lehet olvasni a táblázatból a szórásnégyzet képletét, vagy ki lehet számolni $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ alapján, ahol az jön ki, hogy $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X)$, hiszen indikátorváltozóról van szó, nagyon részletes indoklás nem kell,

$$(1 \text{ pont}) \text{ továbbá } \mathbb{E}(X) = \frac{79}{300}, \text{ (ez a kovarianciához is kell)}$$

(1 pont) mert... (itt vagy ki kell számolni, nagyon részletes indoklás nem kell; vagy arra kell hivatkozni, hogy X egy indikátorváltozó, ekkor ki lehet olvasni a táblázatból, hogy a várható értéke a vonatkozó esemény valószínűsége),

$$(1 \text{ pont}) \text{ cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y), \text{ (elég, ha később kiderül, hogy ezen képlet alapján számol)}$$

$$(2 \text{ pont}) \text{ ahol } \mathbb{E}(XY) = 2\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) \text{ (persze nem baj, ha a 0-s tagokat is odaírja, de azokra nem jár pont)}$$

$$(1 \text{ pont}) = 2 \cdot \mathbb{P}(U \cap B) + \mathbb{P}(U \cap T) \text{ (ezt nem kell ilyen expliciten kimondani, de a következő pontnál szereplő } \frac{7}{30} \text{ és } \frac{3}{100} \text{ valószínűségek eredetére kell valami apró magyarázat, akár az a) megoldásának részleteire hivatkozva)}$$

$$(1 \text{ pont}) = 2 \cdot \frac{7}{30} + 1 \cdot \frac{3}{100}$$

$$(1 \text{ pont}) = \frac{149}{300} \text{ (jó tizedestört alakban, kerekítve is),}$$

$$(1 \text{ pont}) \text{ és } \mathbb{E}(Y) = 2 \cdot \frac{7}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10}$$

$$(1 \text{ pont}) = \frac{17}{10}.$$

$$(1 \text{ pont}) \text{ Tehát } \text{cov}(X, Y) = \frac{149}{300} - \frac{1343}{3000} = \frac{147}{3000} = \frac{49}{1000} (= 0,049) \text{ (ha a kovariancia általános képlete már szerepelt, akkor itt nem jár pont a részletszámításokra, csak a végeredményre. Ha nem szerepelt, de itt az alapján számolt, akkor a fenti 1 pontot itt utólag meg lehet adni).}$$

3. Auf einer Insel im Pazifischen Ozean treten Taifune oft auf. Sie werden vom Anfang eines bestimmten Jahres an (und für unbegrenzte Zeit) beobachtet.

(a) Die Anzahl der in einem Jahr aufgetretenen Taifune werden durch eine Poisson-verteilte Zufallsvariable X modelliert. Nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass kein Taifun in einem Jahr auftritt, e^{-1} ist. Was ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass gerade 3 Taifune in einem Jahr auftreten?

(b) Die Zeit vom Beginn der Beobachtung bis zum Auftreten des ersten Taifuns wird durch eine absolut stetige gedächtnislose Zufallsvariable Y beschrieben, für die

$$\mathbb{P}(Y > 1) = \mathbb{P}(X = 0)$$

gilt. Bestimmen wir den Wert der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y > 11 | Y > 5)$ und den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y^2)$.

Megoldás:

(a) (5 pont)

(0 pont) Először a Poisson-eloszlás λ paraméterét kívánjuk meghatározni.(1 pont) (A feladat szövege szerint) $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-\lambda}$ (1 pont) $= e^{-\lambda}$ (persze az is jó, ha $(\lambda^0/0!) \cdot e^{-\lambda}$ -t ír)(1 pont) tehát $\lambda = 1$.(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(X = 3)$ (1 pont) $= \frac{1^3}{3!} e^{-1} = 1 - 2,5 \cdot e^{-1} (\approx 0,0803)$

(b) (15 pont)

(2 pont) arra, hogy ha Y eloszlása folytonos és örökifjú, akkor csak exponenciális lehet (és a paraméterét kellene meghatározni, amit itt μ -vel fogunk jelölni, mivel a λ jelölés már foglalt. Ha ezt is λ -val jelöli, azért ne vonjunk le pontot, de annak ki kell derülnie, hogy *a priori* nem egyértelmű, hogy ez a ráta ugyanaz, mint a Poisson-eloszlás paramétere, hanem majd a számításokból jön ki).

(2 pont) $\mathbb{P}(Y > 1) = 1 - F_Y(1) = e^{-\mu}$ (1 pont) és $\mathbb{P}(X = 0) (= e^{-\lambda}) = e^{-1}$,(1 pont) tehát $\mu = 1$.

(1 pont) Az örökifjúság miatt

(3 pont) $\mathbb{P}(Y > 11|Y > 5) = \mathbb{P}(Y > 6)$ (1 pont) $= e^{-6 \cdot 1} = e^{-6}$ (0 pont) $(\approx 0,0025)$.(2 pont) $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{D}^2(Y) + \mathbb{E}(Y)^2$

(1+1 pont) $= 1/1^2 + 1/1^2$ (a táblázat alapján, ezért nem kell indokolni, a négyzeteket természetesen el lehet hagyni)

(0 pont) $= 2$.

4. Die Fußballmannschaft eines Dorfes gewinnt jedes Spiel einer Liga (gemeinsam) unabhängig von den anderen Spielen mit Wahrscheinlichkeit $1/3$, beendet das Spiel unentschieden mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ und verliert auch mit Wahrscheinlichkeit $1/3$. Nach den üblichen Regeln des Fußballs wird ein Sieg mit 3 Punkten, ein Unentschieden mit 1 Punkt und eine Niederlage mit 0 Punkten bewertet.

(a) Sei Y die Anzahl der Punkte, die die Mannschaft in einem bestimmten Spiel erhält. Berechnen wir die Varianz von Y .

(b) Sei X die Summe der Punkte, die die Mannschaft in 20 nacheinander folgenden Spielen erhält. Nähern wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X \geq 20)$ durch eine geeignete Approximation an. (Die Bestimmung des genauen Wertes der Wahrscheinlichkeit wird in dieser Aufgabe nicht bewertet.)

Megoldás:

(a) (6 pont)

(1 pont) $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$,(1 pont) ahol $\mathbb{E}(Y) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}$ (1 pont) $= \frac{4}{3}$,(1 pont) $\mathbb{E}(Y^2) = 9 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}$ (1 pont) $= \frac{10}{3}$,

(1 pont) tehát $\mathbb{D}^2(Y) = \frac{10}{3} - \frac{16}{9} = \frac{14}{9}$ (itt már csak a végeredményre jár pont, viszont ha a szórásnégyzet fenti általános képlete hiányzik, de itt az alapján számol, akkor azt a pontot utólag meg lehet adni).

(b) (14 pont)

(1 pont) arra az ötletre, hogy a CHT-t kellene használni. Ez jár akkor is, ha ez a későbbiekben nem sikerül, feltéve, hogy kiderül, hogy az általános CHT-ról és nem a de Moivre–Laplace-tételről van szó.

(1 pont) arra, hogy valamit mond arról, hogy miért lehet a CHT-t alkalmazni, pl. hogy az X valószínűségi változó 20 darab független, azonos eloszlású val. változó összege, amik az egyes meccsek pontszámai. Ezt nem kell nagyon formálisan és részletesen, de ha fölírja képlettel, hogy X ilyen val. változók összege, az elég, és ebben az esetben ezért az 1 pontért még a függetlenséget sem kell hangsúlyozni.

(4 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}(X \geq 20) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 20 \cdot \frac{4}{3}}{\sqrt{20} \sqrt{\frac{14}{9}}} \geq \frac{20 - 20 \cdot \frac{4}{3}}{\sqrt{20} \sqrt{\frac{14}{9}}}\right),$$

(Nem kell fölírni általános $n\mathbb{E}(X_i)$ -vel és $\sqrt{n}\mathbb{D}(X_i)$ -vel, ahol az X_i -k az egyes meccsek pontszámai, de annak ki kell derülnie a megoldásból, hogy a sztenderdizálás során mit vonunk le, majd mivel osztunk. Ha viszont rossz numerikus értékek szerepelnek $n\mathbb{E}(X_i)$ -nél és $\sqrt{n}\mathbb{D}(X_i)$ -nél, akkor részpontszám csak akkor adható, ha szerepel az általános képlet is valamilyen elfogadható formában.)

(3 pont) amit $\mathbb{P}\left(Y \geq \frac{20 - 20 \cdot \frac{4}{3}}{\sqrt{20} \sqrt{\frac{14}{9}}}\right) \approx \mathbb{P}(Y \geq -1,1952)$ -vel közelítünk, ahol $Y \sim N(0; 1)$ (ebből 2 pont a standard normálissal való közelítésre, 1 pont a jobb oldal numerikus értékének kiszámítására, amit szabad ennél előbb vagy ennél később is megtenni, de előbb-utóbb szükség lesz rá, hogy ki lehessen olvasni valamit a táblázatból)

(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}(Y < -1,1952)$

(1 pont) $= 1 - \Phi(-1,1952)$

(1 pont) $= \Phi(1,1952)$ (itt nem jár külön pont arra, hogy $\mathbb{P}(Y > \dots) = \mathbb{P}(Y \geq \dots)$, csak arra, hogy Φ -s alakra hozzuk a keresett valószínűséget. A Φ jelölés sem kötelező. Természetesen más sorrendben is el lehet jutni ehhez az alakhoz)

(1 pont) $\approx \Phi(1,20)$ (ha az 1,1952 numerikus érték sehol nem szerepel, de az 1,20 már igen, az is OK)

(1 pont) $\approx 0,8849$ (a táblázat alapján).

Ha a de Moivre–Laplace tételt akarja használni (pl. úgy, hogy a győzelmeket akarja megszámolni, vagy a győzelmek és döntetlenek számának összegét), akkor a b) részben maximum 5 pont.

5. Die Dichtefunktion des Zufallsvektors (X, Y) wird durch

$$f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (s, t) \mapsto \begin{cases} -4s \cdot e^{-2t}, & \text{falls } -1 < s < 0 \text{ und } t > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

angegeben.

(a) Entscheiden wir, ob X und Y unabhängig sind.

(b) Welche spezielle (gelernte) Verteilung hat Y und was ist der Parameter der Verteilung?

(c) Bestimmen wir die Verteilungsfunktion von X .

Megoldás:

(a) (13 pont)

(2 pont) X és Y pontosan akkor függetlenek, ha $f_{X,Y}(s, t) = f_X(s)f_Y(t)$ teljesül minden $s, t \in \mathbb{R}$ esetén (mivel (X, Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó; ezt nem muszáj odaírni. Részpontszám adható például, ha kifejezti, hogy ez minden s, t -re igaz, de amúgy a képlet jó).

(2 pont) Ha $-1 < s < 0$, akkor $f_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t)dt = \int_0^{\infty} -4se^{-2t}dt$ (a két lépés összevonható)

(0 pont) $= -4s \int_0^{\infty} e^{-2t}dt$

(1 pont) $= -4s \left[-\frac{1}{2}e^{-2t} \right]_{t=0}^{\infty}$

(1 pont) $= -4s \cdot (0 + 1/2) = -2s,$

(1 pont) és ha $s \leq -1$ vagy $s \geq 0$, akkor $f_X(s) = 0$ (ezt nem kell részletesebben indokolni).

(2 pont) Ha $t > 0$, akkor $f_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(s,t)ds = \int_{-1}^0 -4se^{-2t}ds$ (a két lépés összevonható)

(0 pont) $= -e^{-2t} \int_{-1}^0 4sds$

(1 pont) $= -e^{-2t} \left[2s^2 \right]_{-1}^0$

(1 pont) $= -e^{-2t} \cdot (0 - 2) = 2e^{-2t},$

(1 pont) és ha $t \leq 0$, akkor $f_Y(t) = 0$ (ezt sem kell részletesebben indokolni).

(1 pont) arra a következtetésre, hogy $f_{X,Y}(s,t) = f_X(s)f_Y(t)$ az eddigiek alapján minden $s, t \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, és így X és Y független (nem szükséges további indoklás).

Részpontszámok részben jó megoldásokra:

- Ha az megvan, hogy $f_{X,Y}(s,t)$ pontosan azokra az (s,t) -okra 0, amelyekre $f_X(s)f_Y(t) = 0$, arra jár 2 pont, akár indoklás nélkül is.
- Ha szerepel, hogy függetlenek, azért önmagában még nem jár pont, de ha van valamilyen (akár rossz) indoklás is rá, akkor legalább 1 pont jár.
- Ha azt mutatja meg, hogy $F_{X,Y}(s,t) = F_X(s)F_Y(t)$ minden $s, t \in \mathbb{R}$ esetén, az is jó, de ezt a megoldási lehetőséget itt nem részletezzük (tovább tart, mint a fenti mintamegoldás).
- Ha tudja a függetlenség kritériumát, és utána valami olyasmire hivatkozik, hogy a $-4se^{-2t}$ egy csak s -től függő és egy csak t -től függő mennyiség szorzata, és ezért függetlenek, arra (az első 2 ponton felül) csak 4 pont jár, mert lehetne olyan is $f_{X,Y}$, hogy maga a képlet szorzatra bomlik, de szakaszonként van definiálva és az X -re és az Y -ra vonatkozó szakaszhatárok függenek egymástól. Teljes pontszámot akkor lehet integrálás nélkül elérni, ha valami olyasmire hivatkozik, hogy a tartomány, ahol $f_{X,Y}$ nem 0, pontosan annak a két intervallumnak a Descartes-szorzata, ahol f_X , illetve f_Y nem 0, ezen a tartományon $f_{X,Y}(s,t)$ egy csak s -től és egy csak t -től függő kifejezés szorzatára bomlik, és mindenhol máshol mind $f_{X,Y}$, mind $f_X f_Y$ konstans 0. Attól függően, hogy ezt mennyire sikerül értelmesen megfogalmazni, részpontszám is adható.

(b) (2 pont)

(0 pont) Az a) feladatban azt kaptuk, hogy

$$f_Y(t) = \begin{cases} 2e^{-2t}, & \text{ha } t > 0, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

(2 pont) Ez alapján $Y \sim \text{Exp}(2)$. (1 pont arra, hogy exponenciális, 1 pont pedig a paraméterre).

Ha az a)-ban az eloszlásfüggvényt számolta ki, akkor abból is hasonlóan lehet levonni a következtetést. Ha pedig sem az eloszlásfüggvényt, sem a sűrűségfüggvényt nem számolta ki, akkor most az egyiket ki kell számolni!

Ha valahogy megsejti, hogy $\text{Exp}(2)$, arra adjunk 1 pontot akkor is, ha hiányzik az indoklás/peremsűrűségfüggvény/perem-eloszlásfüggvény. De ha csak azt tippeli, hogy exponenciális, arra ne adjunk pontot.

(c) (5 pont)

(1 pont) $t \in \mathbb{R}$ esetén $F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(s)ds,$

(1+1 pont) ami 0, ha $t \leq -1$ és 1, ha $t \geq 0$ (ez OK indoklás nélkül is, még akkor is, ha nem tudta kiszámolni a perem-sűrűségfüggvényt és nem írta fel az előbbi integrált).

(1 pont) és ha $-1 < t < 0$, akkor $F_X(t) = \int_{-1}^t (-2s)ds$ (az előző előtti lépéssel összevonható)

(1 pont) $[-s^2]_{-1}^t = 1 - t^2$.

(Ha már korábban kiszámolta az eloszlásfüggvényt, akkor pontozzuk ott.)

Természetesen más módon is meg lehet határozni X eloszlásfüggvényét, pl. (X, Y) együttes eloszlásfüggvényét meghatározva és annak argumentumában t -vel végtelenhez tartva.

- *6. (a) Stephan Schwindler verdient sein Brot mit Würfelspielen. Heute bietet er das nächste Spiel den Passanten auf der Straße. Der Spieler würfelt mit einem regulären sechseckigen Würfel, und falls er eine Sechs würfelt, zahlt ihm Stephan ("2 000 Forint pro Punkt", also insgesamt) 12 000 Forint und das Spiel endet. Andernfalls zahlt der Spieler Stephan in ähnlicher Weise, ist das Ergebnis nämlich $1 \leq k \leq 5$, so bekommt Stephan $k \cdot 1 000$ Forint und das Spiel läuft weiter, also würfelt der Spieler immer wieder nach den obigen Regeln bis zur ersten Sechs, wenn das Spiel endet. Was ist der Erwartungswert von Stephans Profit pro Spiel? (Der Profit pro Spiel ist die Differenz zwischen Stephans Einnahmen und Ausgaben in einem Spiel, die auch ein negativer Wert sein kann.)

(b) Es ging Stephan in letzter Zeit nicht besonders gut, deshalb entschied er, seinen gezinkten Würfel einzusetzen, um seinen Profit zu steigern. Damit der Trick nicht auffällig ist, wurde der gezinkte Würfel mit 9 anderen regulären Würfel gemischt, die äußerlich identisch aussehen und auch zum gezinkten Würfel passen. Beim gezinkten Würfel ist die Wahrscheinlichkeit einer Sechs $\frac{1}{6} - p$, und die Wahrscheinlichkeit einer Eins ist $\frac{1}{6} + p$ für eine reelle Zahl $0 < p < \frac{1}{6}$, während alle anderen Augenzahlen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ haben. Die Spieler wählen jetzt uniform zufällig einen aus den 10 Würfeln und spielen das Spiel mit dem gewählten Würfel nach den im Teil a) diskutierten Regeln. Bestimmen wir den Wert von p , wenn wir wissen, dass sich der Erwartungswert von Stephans Profit pro Spiel auf den Betrag von 4 600 Forint änderte.

Megoldás:

(a) (9 pont)

(2 pont) Legyen X a profit várható értéke, és legyen E_i az az esemény, hogy elsőre i értéket dob a játékos ($1 \leq i \leq 6$). Ekkor az $E_1, \dots, E_6$ események teljes eseményrendszer alkotnak.

(2 pont) Mivel a dobások függetlenek, ezért amennyiben a játékos nem 6-osat dob, akkor (fizetés után) a kezdeti szituáció áll elő, így

(1 pont) a teljes várható érték tétele szerint

(4 pont)

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^6 \mathbb{E}(X \mid E_i) \mathbb{P}(E_i) = \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^5 (i \cdot 1000 + \mathbb{E}(X)) - 12000 \right) = \frac{5}{6} \mathbb{E}(X) + \frac{3000}{6},$$

amit átrendezve $\mathbb{E}(X) = 3000$ forint adódik. (Ebből 1 pont a teljes várható érték tétele megfelelő alakjára, 1 a megfelelő behelyettesítésre, 1 a megfelelő összegzésre és 1 a végeredményre.)

(b) (11 pont)

(1 pont) Számoljuk ki először a várható értéket, ha a játékos a cinkelt kockát választja, azaz ha a hatos valószínűsége $\frac{1}{6} - p$, az egyesé pedig $\frac{1}{6} + p$, ahol p egy pozitív valós szám (a többi dobás valószínűsége pedig $1/6$). Jelölje ez utóbbi eseményt C .

(1 pont) Mivel a feltételes várható érték maga is egy (a feltételes valószínűség által meghatározott valószínűségi mérték szerinti) várható érték, így a fenti okoskodás, azaz a teljes várható érték tétele alkalmazható,

(2 pont) így tehát

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \mid C) &= \left(\frac{1}{6} + p \right) \cdot (1000 + \mathbb{E}(X \mid C)) - \left(\frac{1}{6} - p \right) \cdot 12000 + \frac{1}{6} \sum_{i=2}^5 (i \cdot 1000 + \mathbb{E}(X \mid C)) \\ &= \left(\frac{5}{6} + p \right) \mathbb{E}(X \mid C) + 500 + p \cdot 13000, \end{aligned}$$

(1 pont) ezt átrendezve pedig

$$\left(\frac{1}{6} - p\right) \mathbb{E}(X | C) = \left(\frac{1-6p}{6}\right) \mathbb{E}(X | C) = 500 + p \cdot 13\,000,$$

(2 pont) azaz

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X | C) &= \frac{3\,000 + p \cdot 78\,000}{1 - 6p} = 3\,000 \cdot \frac{1 + 26p}{1 - 6p} \\ &= 3\,000 \left(-4\frac{1}{3} + \frac{16}{3 - 18p} \right) = -13\,000 + 1\,000 \cdot \frac{16}{1 - 6p}. \end{aligned}$$

(1 pont) Mivel C és $\overline{C}$ teljes eseményrendszert alkot, így ezekre ismét a teljes várható érték tételét alkalmazva

(2 pont)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X | C) \mathbb{P}(C) + \mathbb{E}(X | \overline{C}) \mathbb{P}(\overline{C}) \\ &= \left(-13\,000 + 1\,000 \cdot \frac{16}{1 - 6p} \right) \cdot \frac{1}{10} + 3\,000 \cdot \frac{9}{10} \\ &= -1\,300 + 100 \cdot \frac{16}{1 - 6p} + 2\,700 = 1\,400 + \frac{1\,600}{1 - 6p} = 4\,600, \end{aligned}$$

(1 pont) amiből $p = \frac{1}{12}$.

Egy másik lehetséges megoldás vázlata:

Nem az első dobás eredményére feltételezünk, hanem arra, hogy hányadik dobásra lesz először hatos az eredmény, jelölje az első hatosdobás sorszámát Y .

(2 pont) Az (a) részben azt kell észrevenni, hogy bármely $k \in \{1, 2, \dots\}$ esetén, feltéve, hogy $Y = k$, Sándor bevétele úgy viselkedik, mint $k - 1$ darab független valószínűségi változó összege, amelyek $1/5$ - $1/5$ valószínűséggel veszik fel az 1, 2, 3, 4, 5 értékeket.

(1 pont) arra, hogy az $1/5$ valószínűségeket a feltételes valószínűség definíciója alapján megindokolja. Az egyes dobások függetlenségének és azonos eloszlásának (feltéve, hogy $Y = k$) formalizálása bonyolultabb, ezért ezt itt nem is várjuk el külön pontokért (és ezért sem ez az ajánlott megoldás, hanem az előző).

(2 pont) Mivel egy ilyen valószínűségi változó értéke 3 (a teljes pontszámért ezt indokolni kell)

(2 pont) és $Y \sim \text{Geo}(1/6)$, tehát $\mathbb{E}(Y) = 6$,

(1 pont) a teljes várható érték tétele szerint

(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = -12\,000 + 1\,000 \cdot 3 \cdot (\mathbb{E}(Y) - 1) = -12\,000 + 15\,000 = 3\,000$.

A (b) részben szintén érdemes először megnézni, hogy mi történik, ha a cinkelt kockát választja a játékos (ezt az eseményt továbbra is C -vel jelöljük), majd a „Mivel C és $\overline{C}$ teljes eseményrendszert alkot” résztől ugyanúgy megy a megoldás, mint az előző.

(2 pont) Ha a cinkelt kockát választja, most bármely $k \in \{1, 2, \dots\}$ esetén, feltéve, hogy $Y = k$, az 1. 2., ..., $k-1$. dobás úgy viselkedik, mint $k-1$ független valószínűségi változó, amelyek $\frac{1/6}{5 \cdot 1/6 + p} = \frac{1}{5 + 6p}$

valószínűséggel veszik fel a 2, 3, 4, 5 értékeket és $\frac{1/6 + p}{5 \cdot 1/6 + p} = \frac{1 + 6p}{5 + 6p}$ valószínűséggel az 1 értéket.

(1 pont) Egy ilyen valószínűségi változó várható értéke

$$\frac{1 + 6p}{5 + 6p} + \sum_{k=2}^5 \frac{k}{5 + 6p} = \frac{15 + 6p}{5 + 6p} = 3 - \frac{12p}{5 + 6p}.$$

(2 pont) Mivel feltéve C -t (azaz a $\mathbb{P}(\cdot|C)$ valószínűségi mérték szerint) és továbbá $\{Y = k\}$ -ra ($k = 1, 2, \dots$) feltételezve X megegyezik $k - 1$ darab független és ilyen eloszlású valószínűségi változó összegével

(1 pont) és $Y \sim \text{Geo}(1/6 - p)$,

(1 pont) a teljes várható érték tétele szerint

(2 pont)

$$\mathbb{E}(X|C) = -12\,000 + 1\,000 \cdot \left(3 - \frac{12p}{5 + 6p}\right) \cdot \left(\frac{1}{1/6 - p} - 1\right).$$

(4 pont) Innen lásd a „Mivel C és $\overline{C}$ teljes eseményrendszert alkot” részt (további egyszerű algebrai átalakítások még szükségesek, de ezekre már nem jár pont).

Harmadik megoldás:

Jelölje Y_i az i -edik kör profitját, ekkor ha Y Sándor profitja, akkor

$$Y = \sum_{i=1}^{\infty} Y_i,$$

ezért

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_i).$$

Ez utóbbi lépés jogossága persze indoklásra szorul, ez azonban túlmutat a kurzus keretein, de a mértekelmélet eszköztárával könnyen precízzé tehető az érvelés. (Valójában azt kell felhasználni, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(|Y_i|)$ véges, ami az alábbiakhoz hasonló számolásból következik.)

Legyen H_i az az esemény, hogy az első hatost az i -edik dobás előtt kapjuk, ekkor a teljes várható érték tétele szerint

$$\mathbb{E}(Y_i) = \mathbb{E}(Y_i | H_i) \mathbb{P}(H_i) + \mathbb{E}(Y_i | \overline{H_i}) \mathbb{P}(\overline{H_i}).$$

Itt $\mathbb{E}(Y_i | H_i) = 0$, hiszen a feltétel miatt megáll a játék az i -edik kör előtt. A $\overline{H_i}$ feltétel viszont azt jelenti, hogy az i -edik körben dob a játékos a korábbiaktól függetlenül, így

$$\mathbb{E}(Y_i | \overline{H_i}) = \frac{1}{6}(1\,000 + 2\,000 + 3\,000 + 4\,000 + 5\,000 - 12\,000) = 500,$$

azaz $\mathbb{E}(Y_i) = 500 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$, ebből pedig

$$\mathbb{E}(Y) = 500 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = 500 \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} = 3\,000.$$

Ha a cinkelt kockával dobunk, és a profitot Z_i ill. Z jelöli, akkor a fenti számolás a következőképp módosul:

$$\mathbb{E}(Z_i | \overline{H_i}) = \frac{1}{6}(2\,000 + 3\,000 + 4\,000 + 5\,000) - \left(\frac{1}{6} - p\right) \cdot 12\,000 + \left(\frac{1}{6} + p\right) \cdot 1\,000 = 500 + 13\,000p,$$

és $\mathbb{P}(\overline{H_i}) = \left(1 - \left(\frac{1}{6} - p\right)\right)^{i-1}$, tehát

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= (500 + 13\,000p) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{6} - p\right)\right)^{i-1} = (500 + 13\,000p) \cdot \frac{1}{1 - \left(1 - \left(\frac{1}{6} - p\right)\right)} \\ &= (500 + 13\,000p) \cdot \frac{6}{1 - 6p}. \end{aligned}$$

Persze a kockát is választjuk, így ha X a tényleges profit, és C az az esemény, hogy a cinkelt kockát választjuk, akkor

$$\begin{aligned} 4\,600 &= \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X | C) \mathbb{P}(C) + \mathbb{E}(X | \overline{C}) \mathbb{P}(\overline{C}) \\ &= \frac{1}{10} \cdot (500 + 13\,000p) \cdot \frac{6}{1 - 6p} + \frac{9}{10} \cdot 3\,000, \end{aligned}$$

tehát átrendezve

$$190 = (5 + 130p) \cdot \frac{6}{1 - 6p},$$

ebből pedig $190 - 1140p = 30 + 780p$, azaz $1920p = 160$, vagyis $p = \frac{1}{12}$.