Wiederholung der Klausur

Allgemeine Regeln: Die Klausur dauert 90 Minuten. Die Benutzung eines (nicht graphischen) Taschenrechners ist erlaubt. Numerische Ergebnisse sollen auf 4 Dezimalstellen gerundet werden. Zum Erreichen der maximalen Punktzahl ist es notwendig, detaillierte Lösungen zu geben und die angewandten Behauptungen, Sätze und Eigenschaften aufzulisten. Es ist verboten, während der ersten 30 Minuten den Raum zu verlassen.

1. Über die Ereignisse A, B und C wissen wir, dass sie (gemeinsam) unabhängig sind und positive Wahrscheinlichkeiten haben. Nehmen wir noch an, dass $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{8}$ und $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{2}$ gelten.

   (a) Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eines der Ereignisse A, B und C eintritt.

   (b) Unter der Bedingung, dass das Ereignis A eintritt, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auch C eintritt, B hingegen nicht?

   (c) Sind die Ereignisse $B \cap C$ und $A \cap C$ unabhängig?

   Hinweis: Wenn wir uns auf die Unabhängigkeit von Ereignissen beziehen, spezifizieren wir die betreffenden Ereignisse in jedem Schritt.

2. Die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y ist in der folgenden Tabelle angegeben.

$Y \backslash X$	3	5
0	$\frac{1}{2}$	a
1	b	$\frac{1}{4}$
2	0	c

   (a) Bestimmen wir die Werte von a, b und c, falls $\mathbb{P}(X = 3) = 7/12$ und $\mathbb{E}(Y) = 1/2$ gelten.

   (b) Sind X und Y unabhängig?

   (c) Berechnen wir $\mathbb{E}(XY)$.

3. In einer Bibliothek kann jedes Buch in jedem Monat höchstens einmal, von höchstens einer Person und nur für den entsprechenden Monat ausgeliehen werden. In die Bibliothek werden immer mehr Bücher gebracht, aber die Anzahl der Besucher ändert sich nicht. Daher ist es mit der Zeit immer weniger wahrscheinlich, dass jemand ein bestimmtes Buch in einem Monat ausleiht. Im k-ten Monat (vom Anfang der Beobachtung an) gibt es $3k$ Bücher in der Bibliothek ($k \in \mathbb{N}^+$), und jedes von ihnen wird in diesem Monat unabhängig von den anderen Büchern mit Wahrscheinlichkeit $1/k$ ausgeliehen.

   (a) Bestimmen wir die (präzise) Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass mindestens 3 Bücher im 68. Monat ausgeliehen werden. Was ist die Standardabweichung der Anzahl der ausgeliehenen Bücher im 68. Monat?

   (b) Schätzen wir bei einer großen k durch eine geeignete Approximation die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass mindestens 3 Bücher im k-ten Monat ausgeliehen werden.

4. Wir warten auf einen Bus in der Haltestelle. Wir wissen, dass die Verteilung unserer Wartezeit stetig und gedächtnislos ist. Unter der Bedingung, dass wir schon 5 Minuten lang warteten, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir noch mindestens 5 Minuten lang warten müssen, zweimal die (bedingte) Wahrscheinlichkeit des Gegenteils dieses Ereignisses.
   (a) Was ist der Erwartungswert unserer (totalen) Wartezeit?
   (b) Ab einem bestimmten Tag warten wir jeden Tag einmal auf den Bus, die oben genannten Annahmen werden jeden Tag erfüllt und die Wartezeiten sind an verschiedenen Tagen unabhängig voneinander. An welchem Tag müssen wir voraussichtlich zum ersten Mal mindestens eine halbe Stunde warten? D.h.: bestimmen wir den Erwartungswert der Anzahl der Tage bis zum ersten solchen Tag, wenn wir mindestens eine halbe Stunde warten müssen.

5. Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X ist

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ \dfrac{t}{2}, & \text{falls } 0 \leq t < 1/2, \\ \dfrac{1}{4}, & \text{falls } 1/2 \leq t < 2, \\ \dfrac{(t-1)^2}{4}, & \text{falls } 2 \leq t < 3, \\ 1, & \text{falls } t \geq 3. \end{cases}$$

   (a) Zeigen wir, dass X absolut stetig ist.
   (b) Bestimmen wir die Dichtefunktion von X.
   (c) Berechnen wir den Erwartungswert von X.

*6. In der Ebene wählen wir einen Punkt A zufällig auf der Strecke zwischen den Punkten $(1/2; 0)$ und $(1; 0)$ und (unabhängig von A) einen zufälligen Punkt B auf der Strecke zwischen dem Ursprung und dem Punkt $(0; 1)$. Sei X der Tangens des Winkels $\angle ABO$. Geben wir die Verteilungsfunktion von X an.

Verteilung	Notation	ran$X$	$F_X(t)$	$f_X(k)$, $f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0, 1\}$		$1-p$, p	p	$p(1-p)$
Binomialverteilung	$\mathrm{Bin}(n; p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$		$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson-Verteilung	$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$\mathbb{N}$		$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
geometrische Verteilung	$\mathrm{Geo}(p)$	$\mathbb{N}^+$		$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
uniforme Verteilung	$\mathrm{U}(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentialverteilung	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0; \infty)$	$1 - e^{-\lambda t}$ $(0 \leq t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$