

Klausur (Zárthelyi dolgozat)

Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontoszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontoszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontoszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozathoz nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontoszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírtól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Im Wald kommen zwei verschiedene Arten von Kleinkatzen vor: Hauskatzen und Wildkatzen. Die Wildkatzen ergeben 10% der ganzen Population. Alle Wildkatzen und im Durchschnitt eine von 5 Hauskatzen sind getigert.
 - (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus dem Wald zufällig gewählte Katze getigert ist?
 - (b) Im Wald erblicken wir zufällig eine getigerte Katze, aber sie ist zu weit, und wir können nicht entscheiden, ob sie eine Wildkatze oder eine Hauskatze ist. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir eine Hauskatze sehen?
 - (c) Eine Katze wird aus dem Wald zufällig gewählt. Entscheiden wir, ob die folgenden Ereignisse unabhängig sind:
 $A = \{ \text{die gewählte Katze ist nicht getigert} \}$ und $B = \{ \text{die gewählte Katze ist eine Hauskatze} \}$.

Megoldás:

A megoldásban az egyszerűség kedvéért használjuk a (c) feladatban szereplő A és B eseményeket. Ez természetesen nem elvárás, máshogy is lehet jelölni az eseményeket.

(a): 9 pont

(1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(\bar{A})$ (vagy valahogy a saját jelölése szerint leírja, hogy mit keresünk – ha ez később kiderül, akkor nem baj, hogy nem szerepel az elején expliciten).

(1 pont) $\mathbb{P}(B) = 9/10$,

(1 pont) tehát $\mathbb{P}(\bar{B}) = 1/10$.

(1 pont) $\mathbb{P}(\bar{A}|B) = 1/5$

(1 pont) és $\mathbb{P}(\bar{A}|\bar{B}) = 1$.

(1 pont) Mivel B és $\bar{B}$ teljes eseményrendszert alkotnak (diszjunktak és uniójuk Ω – ezt nem kell részletezni, de valami indoklás kell, hogy miért használható a TVT),

(1 pont) a teljes valószínűség tételéből

(1 pont) $\mathbb{P}(\bar{A}) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(\bar{A}|B) + \mathbb{P}(\bar{B}) \mathbb{P}(\bar{A}|\bar{B})$

(0 pont) $= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \cdot 1$

(1 pont) $= \frac{7}{25} = 0,28$. (Tizedestört és bármilyen közönséges tört alakban is jók az eredmények, a feladat további részeiben is.)

(b): 5 pont

(1 pont) A keresett (feltételes) valószínűség $\mathbb{P}(B|\bar{A})$.

(1 pont) A Bayes-tétel (vagy: Bayes-formula, egyszerű Bayes-tétel) szerint

(2 pont) $\mathbb{P}(B|\bar{A}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{A}|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(\bar{A}|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\bar{A}|\bar{B})\mathbb{P}(\bar{B})}$ (elég, ha azt írja, hogy $\mathbb{P}(B|\bar{A}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{A}|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(\bar{A})}$, mivel ennek a nevezőjét az (a) részben már kiszámoltuk)

(0 pont) $= \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{9}{10} + 1 \cdot \frac{1}{10}}$

(1 pont) $= \frac{9}{14} = 0,6429$.

(c): 6 pont

Önmagában arra, hogy kimondja, hogy nem függetlenek, nem jár pont.

(1 pont) arra, ha kimondja és van valami indoklás, akkor is, ha az nem (teljesen) jó.

Indoklás: 1. megoldás.

(1 pont) A függetlenség azt jelentené, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

(1 pont) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{18}{25}$,

(1 pont) és ezért $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)$,

(1 pont) ahol $\mathbb{P}(A|B) = \frac{4}{5}$,

(1 pont) és így $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} = \frac{18}{25} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{18}{25} \cdot \frac{9}{10} = \frac{81}{125}$ (itt a pont csak annak a megállapítására jár, hogy a szükséges számításokat már elvégeztük és a két oldal tényleg nem egyenlő, nem is muszáj, hogy a $18/25$ és a $81/125$ végeredmények ott legyenek).

2. megoldás.

(1 pont) A függetlenség azzal ekvivalens, hogy $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$,

(1 pont) mivel $\mathbb{P}(B) > 0$ (ezt nem lehet megkerülni azzal, hogy „impliciten szerepel a megoldásban”!).

(1 pont) $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{18}{25}$,

(2 pont) viszont $\mathbb{P}(A|B) = 4/5 \neq \frac{18}{25}$.

3. megoldás.

(1 pont) A függetlenség azzal ekvivalens, hogy $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$,

(1 pont) mivel $\mathbb{P}(A) > 0$ (ezt nem lehet megkerülni azzal, hogy „impliciten szerepel a megoldásban”!).

(1 pont) $\mathbb{P}(B|A) = 1$,

(1 pont) mert... (Bayes-tétellel vagy anélkül, de megindokolja, hogy nem cirnos macskaféle nem lehet vadmacska).

(1 pont) Így $\mathbb{P}(B|A) \neq \mathbb{P}(B) = \frac{9}{10}$.

További lehetséges megoldások. A és B pontosan akkor függetlenek, ha A és $\bar{B}$ függetlenek, avagy ha $\bar{A}$ és B , avagy ha $\bar{A}$ és $\bar{B}$. Erre jár 1 pont, ezután pedig annak megindokolására, hogy az említett ekvivalens függetlenség nem áll fent, további 4 pont (az (a)-ban már megkapott eredmények miatt $\bar{A}$ -val könnyebb dolgozni, mint A -val).

2. Zwei reelle Zahlen werden im Intervall $[0; 1]$ unabhängig und (uniform) zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Summe der zwei Zahlen größer als zweimal die Differenz der größeren und kleineren Zahl?

Megoldás:

(2 pont) A véletlen kísérlet megegyezik egy véletlen pont választásával a $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzetben.

(1 pont) Ez az Ω eseménytér.

(2 pont) (x, y) -nal jelölve a véletlen pontot a négyzetben, a kedvező terület a négyzetnek az a része, ahol $x > y$ és $x + y > 2(x - y)$ vagy $y > x$ és $x + y > 2(y - x)$.

(2 pont) arra, hogy ezeket az egyenleteket az ábra elkészítéséhez/kedvező terület kiszámításához használható alakra hozza: $x > y > x/3$ vagy $y > x > y/3$. (Vagy x -et fejezi ki y függvényeként, hasonlóan.)

(2 pont) A kedvező terület tehát a négyzetnek az $y = x/3$ és az $y = x$, illetve az $y = x$ és az $y = 3x$ egyenesek közé eső része.

(3 pont) jó ábra

(3 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség $= \frac{T_{\text{kedvező}}}{T_{\Omega}}$.

(1 pont) $T_{\text{kedvező}} = 1 - T_{\text{kedvezőtlen}}$

(1 pont) $T_{\Omega} = 1$

(2 pont) $T_{\text{kedvezőtlen}} = 2 \times \frac{1 \cdot 1/3}{2} = 1/3$ (valahogy kiderül, hogy két derékszögű háromszög területének összegét számolja, megfelelő oldalhosszakkal)

(0 pont) ezért $T_{\text{kedvező}} = 2/3$

(1 pont) és így a kért valószínűség is $2/3$.

Ha egyből a kedvezőtlen területet kezdi el körülírni a kedvező helyett, az is jó. Ha máshogy számolja a kedvező területet, az is jó.

Megjegyzés: Mivel a geometriai valószínűségi mezős feladatok megoldásait a gyakorlatokon is ritkán írtuk fel ennyire részletesen, ebben a feladatban azokra a lépésekre is jár a pont, amiket a hallgató nem írt fel expliciten, de a későbbi megoldásból egyértelműen kiderül, hogy jól használta őket. Pl. ha kihagyja az első lépést, de utána a megfelelő módon rajzol ábrát/számol területeket, akkor ez a 2 pont is jár, vagy ha nem írja fel, hogy mi Ω , de később világos, hogy jól határozza meg a területét (és nem csak véletlenül jön ki neki 1 megoldásként), akkor arra is jár pont stb. stb. Ha nincs ábra, de a szövegből/számításokból kiderül, hogy a megfelelő síkidomok területét számolja, akkor az ábrára is adjunk pontot. Ha azonban a későbbi lépés, ami a hiányzó jó, de expliciten nem szereplő lépést használná, hibás, akkor sajnos a hiányzó lépésre sem lehet pontot adni.

3. Anna, Bea und Christa spielen ein Kartenspiel mit einem ungarischen Spielkartenpaket. Nach der Mischung bekommt jede von ihnen (gerade) 8 Karten (und 8 Karten werden nicht verteilt). Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

- (a) es kein Blatt der Farbe "Herz" nach der Verteilung in der Hand von Anna gibt?
- (b) es kein "Herz" nach der Verteilung in den Händen von Bea und Christa gibt?
- (c) jede Spielerin mindestens ein "Herz" nach der Verteilung in ihrer Hand hat?

(Ein ungarisches Spielkartenpaket besteht aus 32 Blättern, von denen genau 8 Blätter die Farbe "Herz" haben.)

Megoldás:

(a) (5 pont)

(1 pont) Jelöljük rendre A -val, B -vel és C -vel azt az eseményt, hogy Annánál, Beánál, illetve Christánál van piros lap. Ekkor a $\mathbb{P}(\overline{A})$ valószínűséget keressük.

1. megoldás.

(1 pont) Az ötlet az, hogy nézzük meg, hogy melyik 8-as blokkban lehetnek piros lapok (az Annának, Beának, illetve Christának osztottak és a maradék, ki nem osztott 8 közül).

(1 pont) Itt a kedvező lehetőségeket az adja, amikor csak Beánál, Christánál és a maradékban lehet piros lap, tehát $\binom{24}{8}$ -féleképpen oszthatjuk el a piros lapokat.

(1 pont) Az összes lehetőséget az adja, hogy bármelyik 8-asban lehetnek piros lapok, tehát $\binom{32}{8}$ lehetőség van.

(1 pont) Így tehát a keresett valószínűség $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$.

2. megoldás.

(1 pont) Ahhoz, hogy Annánál ne legyen piros lap, az kell, hogy a 24 nem piros lap közül kapjon 8-at, míg összesen 32 lap van (és ha ez teljesül, akkor a maradékból Bea és Christa bármit kaphat), míg az összes lehetőséget az adja, hogy 32 lapból húz 8-at, tehát

(2 pont) $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{\binom{24}{8}}{\binom{32}{8}}$ (ha ezt helyesen felírja, akkor jár az előző 1 pont is szöveges indoklás nélkül is)

(1 pont) $(= \frac{(24!)^2}{32!16!}) \approx 0,0699$.

3. megoldás.

(1 pont) Tegyük fel (az általánosság megszorítása nélkül, a játékosok közti szimmetria miatt), hogy Anna, Bea, Christa sorrendben osztjuk ki a lapokat. Ha Annánál nincs piros lap, ő a 24 nem piros lap közül kap 8-at, majd Bea a még ki nem osztott 24 lap közül 8-at, majd Christa a maradék 16 lap

közül 8-at. Az összes lehetőséget pedig az adja, hogy Anna a 32 lapból kap meg 8-at, Bea a maradék 24-ből 8-at, majd Christa a még mindig fennmaradó 16-ból 8-at.

(2 pont) Tehát $\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{\binom{24}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}}$ (ha ezt helyesen felírja, akkor jár az előző 1 pont is szöveges indoklás nélkül is)

(1 pont) $(= \frac{(24!)^2}{32!16!}) \approx 0,0699$.

Ha máshogy számolja ki, de jól megindokolja, az is rendben van.

(b) (5 pont)

(1 pont) Az előbbi jelöléssel most $\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C})$ -t keressük.

1. megoldás.

(2 pont) Az előbbi 1. megoldás gondolatmenete alapján most az adja a kedvező lehetőségeket, ha csak Anna lapjai és a ki nem osztott 8 lap között lehetnek pirosak.

(1 pont) Ez tehát $\binom{16}{8}$ lehetőség.

(0 pont) Az összes lehetőség száma még mindig $\binom{32}{8}$.

(1 pont) Így tehát a keresett valószínűség $\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}}$.

2. megoldás.

(1 pont) Tegyük fel most (az általánosság megszorítása nélkül), hogy Bea, Christa, Anna sorrendben osztjuk ki a lapokat. Ahhoz, hogy se Beánál, se Christánál ne legyen piros lap, az kell, hogy Bea a 24 nem piros lap közül kapjon 8-at, Christa pedig az ezután fennmaradó 16 nem piros lap közül 8-at (ami után Anna bármit húzhat a maradékból), míg az összes lehetőséget az adja, hogy Bea 32 lapból, majd Christa az általa nem húzott 24 lapból húz 8-at (Anna pedig ezután bármit húzhat a maradékból).

(2 pont) Tehát $\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{\binom{24}{8}\binom{16}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}}$ (ha ezt helyesen felírja, akkor jár az előző 1 pont is szöveges indoklás nélkül is)

(1 pont) $(= \frac{16!24!}{32!8!}) \approx 0,0012$.

3. megoldás. Ugyanez, csak az (a) 3. megoldásához hasonlóan az összes játékos húzására való lehetőségek számát figyelembe vesszük, így az összes kedvező eset számának $\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{16}{8}$ és az összes eset számának $\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}$ felel meg.

(c) (10 pont) (1 pont) A keresett valószínűség $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

(1 pont) összesen arra az ötletre, hogy a komplementer esemény valószínűségét kellene kiszámolni és a valószínűség $1 - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$.

(1 pont) összesen arra, ha valahogy kiderül a megoldásból, hogy $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{C})$ és $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C})$.

Ha ezt nem veszi észre, de külön-külön mindet kiszámolja, jár ez az 1 pont.

(1 pont) A Poincaré-formula szerint

(1 pont) $\mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = (\mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(\overline{B}) + \mathbb{P}(\overline{C}) - \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) - \mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C}) - \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{C}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})) = 3\mathbb{P}(\overline{A}) - 3\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{C}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.

(1 pont) Leírja, hogy $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ -t milyen gondolatmenet alapján lehet kiszámolni.

A korábbi 1. megoldásokra emlékeztető megoldás: Most mind a 8 piros lapnak a nem kiosztottak között kell lennie (vagyis pontosan a piros lapokat nem osztjuk ki). Ez 1 lehetőség, míg az összes lehetőség száma továbbra is $\binom{32}{8}$.

A korábbi 2. megoldásokra emlékeztető megoldás: Ha az $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$ esemény bekövetkezik, akkor pl. Anna, Bea, Christa sorrendben kiosztva a lapokat, Anna a 24 nem piros lapból kap nyolcat, Bea a 16 maradék nem pirosból 8-at és Christa megkapja a fennmaradó 8 nem piros lapot, míg az összes lehetőséget az adja, hogy Anna 32, Bea az általa nem húzott 24 és Christa az általuk nem húzott 16 lapból kap 8-at. Ezért

(2 pont) $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{1}{\binom{32}{8}}$ avagy $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = \frac{\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}}{\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}}$ (ha ezek valamelyikét helyesen felírja, akkor jár az előző 1 pont is szöveges indoklás nélkül is)

(1 pont) $(= \frac{24!8!}{32!}) \approx 9,507 \cdot 10^{-6}$.

(1 pont) Behelyettesítve a fenti formulákba, $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) (= 1 - \mathbb{P}(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})) = \dots = 0,7939$.

Egyéb megjegyzések a pontozáshoz. Ha teljesen rossz eseménytérrel számol, de az kiderül, hogy klasszikus a valószínűségi mező / kedvező és összes esetek számának arányával próbál számolni, akkor max. 1 pont.

Tudomásul vesszük, hogy egyszerűbb számológépek is tudnak binomiális együtthatókat kiszámolni, emiatt a zárójelben szereplő, faktoriálisokból álló kifejezéseket nem muszáj kiírni.

Ha valahogy brute force-szal Poincaré nélkül kiszámolja helyesen a keresett valószínűségeket (ami elég valószínűtlen), azért jár a max. pont is, ha kellően megindokolja.

4. Das Organisationskomitee einer Veranstaltung soll zwischen zwei Programmen wählen, sie werden als Programm A und Programm B bezeichnet. Jedes der 9 Mitglieder des Komitees soll für gerade eine Möglichkeit votieren, keine Enthaltung ist möglich. Drei Mitglieder votieren sicherlich fürs Programm A , und zwei Mitglieder wissen schon, dass sie das Programm B wählen werden. Vier Mitglieder sind aber unsicher, deshalb werfen alle von ihnen unabhängig voneinander eine reguläre Münze, und sie votieren folgenderweise: falls der Wurf eines Mitglieds einen Kopf gibt, dann wählt er/sie das Programm A , sonst das Programm B . Sei X die Anzahl der Mitglieder, die fürs Programm A votieren.
- Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine der zwei Optionen mindestens drei Stimmen mehr erhält, als die andere?
 - Geben wir die Verteilung der Variablen $X - 3$ zusammen mit ihrem/ihren Parameter(n) an.
 - Sei Y die Anzahl der Mitglieder, die das Programm B wählen. Bestimmen wir die gemeinsame Verteilung der Variablen X und Y und die entsprechenden Randverteilungen. Geben wir das Ergebnis möglichst in einer Tabelle an (es ist aber auch genügend, die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$, $\mathbb{P}(X = k)$ und $\mathbb{P}(Y = l)$ nur für solche Zahlen k und l anzugeben, für die diese Werte positiv sind).

Megoldás:

Ami zárójelben van, azt nem muszáj odaírni.

(a) (7 pont)

(1 pont) $\mathbb{P}(\text{több mint két szavazattal nyer valamelyik opció}) = \mathbb{P}(A \text{ nyer több mint 2 szavazattal}) + \mathbb{P}(B \text{ nyer több mint 2 szavazattal})$.

(Ha a következő lépések jók, ezt át szabad ugrani pontlevonás nélkül.)

(1 pont) $\mathbb{P}(A \text{ nyer több mint 2 szavazattal}) = \mathbb{P}(A\text{-ra (pontosan) 6-an szavaznak}) + \mathbb{P}(A\text{-ra 7-en szavaznak})$

$(= \mathbb{P}(A\text{-ra 3 bizonytalan szavaz}) + \mathbb{P}(B\text{-re 4 bizonytalan szavaz}) (= \mathbb{P}(X = 6) + \mathbb{P}(X = 7))$

(1+1 pont) $= \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{4}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4$ (a $\binom{4}{3}$ helyett 4, a $\binom{4}{4}$ helyett 1 vagy semmi is jó persze)

(0 pont) $= \frac{5}{16} (= 0,3125)$.

(1 pont) Hasonlóan: $\mathbb{P}(B \text{ nyer több mint 2 szavazattal}) = \mathbb{P}(B\text{-ra (pontosan) 6-an szavaznak}) (= \mathbb{P}(A\text{-ra 0 bizonytalan szavaz})) (= \mathbb{P}(X = 3))$.

(1 pont) $= \binom{4}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^4$

(0 pont) $= \frac{1}{16}$,

(1 pont) tehát a keresett valószínűség $3/8 (= 0,375$, más közönséges tört alakban is jó).

Ha valamiért külön-külön számolja ki, hogy mi a valószínűsége, hogy A , illetve B legalább 2 szavazattal nyer, és nem adja össze ezeket, azért 1 pontot vonjunk le.

(b) (3 pont)

(2 pont) $(X - 3) \sim B(4; 1/2)$ (1 pont arra, hogy binomiális, további 1 pont arra, ha mindkét paraméter jó és világos, legalább impliciten, hogy melyik az n és melyik a p),

(1 pont) mert... (valahogy megindokolja, hogy 4 független kísérletet végzünk és mind $1/2$ valószínűséggel sikerül, ahol a siker az, hogy egy adott bizonytalan fejlet dob, és $X - 3$ a sikerek száma. Nem baj, ha az indoklás nem egészen teljes, de indoklás hiányában nem jár a pont).

Jó megoldás az is, hogy $\mathbb{P}(X - 3 = k)$ hiányzó értékeit (amiket még nem számoltunk ki az (a)-ban: $k = 1, 2$) kiszámolja és utána állapítja meg, hogy pont a $B(4; 1/2)$ súlyfüggvényét kapta. Ebben az esetben nem szükséges a binomiális eloszlás interpretációjával érvelni, 1 pont jár összesen a hiányzó értékek kiszámítására.

Ha valaki tökéletesen megadja $X - 3$ eloszlását (pl. a súlyfüggvény összes nem 0 értékével), de nem

írja oda, hogy binomiális, vagy odaírja, de azt nem, hogy milyen paraméterekkel, arra 2 pont jár. Eből részpontoszám adható (pl. ha egy-két értéket kifejejt, de nem többet, vagy ha leírja minden egyes értékhez a kedvező esetek számát, de nem magukat a valószínűségeket stb.).

(c) (10 pont)

A helyes táblázat (peremeloszlásokkal együtt):

$\begin{array}{c} X \\ Y \end{array}$	3	4	5	6	7	f_Y
2	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
4	0	0	$\frac{3}{8}$	0	0	$\frac{3}{8}$
5	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
6	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$
f_X	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	(1)

A táblázatban szereplő értékek indoklásáról lásd a következő *gyorsított pontozási útmutatót*.

Gyorsított pontozási útmutató tökéletes együttes eloszlás esetén (ha $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$ -re minden olyan (k, l) -re helyes érték szerepel, amelyre az nem 0):

(3 pont), ha az együttes eloszlásban szereplő pozitív értékek helyesek, akár mindenfajta indoklás nélkül is. A feladat megfogalmazása miatt nem jár levonás azért, ha csak ezeket számolja ki és nem említi meg, hogy minden más kimenetel valószínűsége 0.

(1 pont) annak megemlítésére, hogy $\mathbb{P}(X = 3, Y = 6)$, $\mathbb{P}(X = 6, Y = 3)$ és $\mathbb{P}(X = 7, Y = 2)$ értékeit már kiszámolta az (a) vagy a (b) részben, vagy ha nem számolta még ki, akkor ezek kiszámítására összesen. Ha (a)-ban vagy (b)-ben már észrevette, hogy tulajdonképpen ezeket a valószínűségeket számolta ki, az is jó.

(1 pont) $\mathbb{P}(X = 4, Y = 5)$ kiszámítására (itt természetesen lehet a (b)-re hivatkozni és azt mondani, hogy ez $\mathbb{P}(X = 4)$, avagy $\mathbb{P}(X - 3 = 1)$, de nem muszáj. Elég, ha az szerepel, hogy $\mathbb{P}(X = 4, Y = 5) = \binom{4}{1}(\frac{1}{2})^4 = 1/4$).

(1 pont) $\mathbb{P}(X = 5, Y = 4)$ kiszámítására (hasonlóan).

(2 pont) X peremeloszlására, ha az is helyes.

(2 pont) Y peremeloszlására, ha az is helyes.

Általános javítási útmutató (hibás vagy hiányos együttes eloszlás esetére):

Az együttes eloszlásra összesen 6 pont jár.

(1 pont) arra az ötletre, hogy $X + Y$ mindig 9-cel egyenlő, másképp fogalmazva $Y = 9 - X$ (1 valószínűséggel vagy mindig). Ha ez a megoldásból derül ki, akkor is jár rá a pont. Ha van táblázat, ez ekvivalens azzal, hogy a „mellékátlón” kívüli elemek 0-val egyenlők.

(1 pont) arra, hogy $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$ pontosan akkor nem 0, ha $k = 3, \dots, 7$ és $l = 9 - k$. Ez is elég, ha a végén a táblázatból kiderül, illetve ha nincs táblázat, de ezek az értékek mind pozitívak és az összegük 1 (és az összes többi $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$ vagy 0, vagy nincs is megemlítve), akkor jár ez a pont, további indoklás nélkül is.

(1 pont) Valahogy kiderül az, hogy $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$ értékét $k = 3, 6, 7$ -re már kiszámoltuk az (a) részben. Ehhez is elég, ha a táblázatba írja a helyes értékeket.

(1 pont) $\mathbb{P}(X = 4, Y = 5) = \binom{4}{3}(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{4}$.

(Ha ez így szerepel, akkor már nem kell tovább indokolni. Lehet azt is mondani, hogy $p = 1/2$ miatt/-szimmetria miatt ez ugyanannyi, mint $\mathbb{P}(X = 6, Y = 3)$, amit már kiszámoltunk.)

(1 pont) $\mathbb{P}(X = 5, Y = 4) = \binom{4}{2}(\frac{1}{2})^4 = \frac{3}{8}$.

(Plusz hasonló megjegyzések a javításhoz, mint az előző pontnál.)

(0 pont) Ezek alapján elkészül a táblázat (ha van).

További megjegyzés: A (c) részből eddig, ha a táblázatban szereplő nem 0 értékek részben vagy teljesen rosszak, de az jó, hogy melyik értékek nem 0-k (illetve hogy melyik értékek vannak felsorolva, ha a 0 értékeket nem sorolja fel), akkor max. 3 pont.

A peremeloszlásokra 4 pont jár (ha van táblázat, akkor az alapján, további indoklás nélkül is):

(1 pont) X és Y értékkészlete is jó, és minden olyan értékre, amire $\mathbb{P}(X = k)$, illetve $\mathbb{P}(Y = l)$ nem 0, meg van adva egy-egy nem 0 érték, és ezen értékek összege X és Y esetén is 1.

(1+1 pont) $f_Y(l) = \sum_k f_{(X,Y)}(k, l)$ minden l -re és $f_X(k) = \sum_l f_{(X,Y)}(k, l)$ minden k -ra teljesül a hallgató által megadott megoldásban.

(1 pont) jár végül arra, ha a perem-súlyfüggvények értékei nemcsak az eddig felsoroltakat teljesítik, hanem tényleg mind jók is.

További megjegyzések: Ha nem írja le a peremeloszlásokat, akkor ebből a 4 pontból csak az értékkészletekre lehet pontot adni, illetve esetleg ha az (a) vagy a (b) részből kiderül még valami a peremeloszlásokra vonatkozóan, akkor arra.

Ha az együttes eloszlást nem tudja jól megadni, de X súlyfüggvényét (pl. a binomiális eloszlás képlete alapján) jól meg tudja adni, arra jár a (c)-ben max. 4 pont. Ha rájön, hogy $(Y - 2) \sim B(4; 1/2)$ és ez alapján Y súlyfüggvényét is jól meghatározza, arra további max. 4 pont.

5. Die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X ist durch die Formel

$$f_X(t) = \begin{cases} \frac{c}{t^2} & \text{falls } t > 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

angegeben, wo c eine passende Konstante ist.

(a) Bestimmen wir den Wert von c .

(b) Wir definieren die Variable Y folgenderweise:

$$Y = \begin{cases} 3, & \text{falls } X \leq 3, \\ 0, & \text{falls } 3 < X \leq 4, \\ 4, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y = k)$ für jede $k \in \mathbb{R}$, für die dieser Wert positiv ist.

(c) Berechnen wir den Erwartungswert und die Standardabweichung von Y .

Megoldás:

(a) (6 pont)

(1 pont) f_X akkor lesz sűrűségfüggvény, ha nemnegatív (ezt elég csak megemlíteni, $c > 0$ miatt világos, hogy ez teljesül)

(2 pont) és $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{c}{x^2} dx$

($\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx$ -t ki lehet hagyni és egyből $\int_1^{\infty} \frac{c}{x^2} dx$ -szel kezdeni, de ha csak az előbbi szerepel, akkor csak 1 pont)

(1 pont) $= [-c/x]_1^{\infty}$

(1 pont) $(= 0 + c) = c$,

(1 pont) tehát $c = 1$.

Ha c -t rosszul határozta meg, de továbbszámol a rossz értékkel, akkor a további részekre lehet pontot adni, de ha a $\mathbb{P}(Y = k)$ -k összegére nem 1 jön ki neki, akkor vonjunk le még 1 pontot.

(b) (7 pont)

(1 pont) $\text{Ran}(Y) = \{0, 3, 4\}$ (ha ez hiányzik, de később szerepel $\mathbb{P}(Y = k)$ minden $k \in \{0, 3, 4\}$ esetén és ezek összege 1, vagy kimondja, hogy más értéket nem vesz fel Y , akkor is jár ez a pont)

(1 pont) $\mathbb{P}(Y = 3) = \mathbb{P}(X \leq 3) (= \mathbb{P}(1 < X \leq 3) = \int_1^3 f_X(x) dx) = \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$

(1 pont) $(= [-1/x]_1^3) = 1 - 1/3 = 2/3$. (A primitív függvényre itt nem jár külön még egy pont, mert az (a) részben már adtunk, így nem baj, ha egyből a behelyettesítéssel kezdi.)

(1 pont) Hasonlóan $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(3 < X \leq 4) = \int_3^4 f_X(x) dx = \int_3^4 \frac{1}{x^2} dx$ (ha itt nem indokolja meg, hogy ez az eloszlásfüggvény/a val. változó folytonossága miatt igaz, akkor is jár ez a pont)

(1 pont) $(= [-1/x]_3^4) = 1/3 - 1/4 = 1/12$. (0,83 tizedes tört alakban, illetve 4 értékes jegyre kerekítve is jó, az előbbi 2/3 is.)

(1 pont) Végül $\mathbb{P}(Y = 4) = \mathbb{P}(X > 4) = \int_4^\infty f_X(x) dx = \int_4^\infty \frac{1}{x^2} dx$

(1 pont) $(= [-1/x]_4^\infty) = 0 + 1/4 = 1/4$.

(Ha $\mathbb{P}(Y = k)$ a három releváns k pontból kettőben már megvan, a harmadikat szabad komplementer valószínűséggel is számolni.)

(c) (7 pont)

(1 pont) $\mathbb{E}(Y) = 3\mathbb{P}(Y = 3) + 0\mathbb{P}(Y = 0) + 4\mathbb{P}(Y = 4)$

(1 pont) $= 3 \cdot \frac{2}{3} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 3$. (Az előző pont akkor is jár, ha egyből „ $\mathbb{E}(Y) =$ ” után írja a behelyettesített számszerű értékekkel a várható érték képletét, vagy ha a várható érték általános képletét írja le először és utána egyből mindent behelyettesít.)

(1 pont) $\mathbb{D}^2(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$,

(1 pont) ahol $\mathbb{E}(Y^2) = 9\mathbb{P}(Y = 3) + 0\mathbb{P}(Y = 0) + 16\mathbb{P}(Y = 4)$

(1 pont) $= 9 \cdot \frac{2}{3} + 16 \cdot \frac{1}{4} = 10$, (A várható érték pontozásához hasonlóan elfogadunk ennél tömörebb megoldásokat.)

(1 pont) így $\mathbb{D}^2(Y) = 10 - 3^2 = 1$,

(1 pont) tehát $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{\mathbb{D}^2(Y)} = \sqrt{1} = 1$.

Megjegyzés: Ha valaki a (b) részben nem tudta Y eloszlását meghatározni, de próbálja általánosan/paraméteresen meghatározni $\mathbb{E}(X)$ -et és $\mathbb{D}^2(X)$ -et, akkor a (c)-re max. 3 pont. Pontozás attól függően, hogy mennyire hihető, hogy az ezekre vonatkozó képleteket nem csak ismeri, hanem konkrét val. változókra is jól tudja alkalmazni. A teljes 3 ponthoz mindenképpen szükséges, hogy Y értékkészletét felismerje (a 0 értéket persze ki lehet hagyni a momentumok meghatározásánál).

*6. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $x \mapsto e^{-e^{-x}}$ ($e \approx 2,71\dots$). (Auf dem 5. Übungsblatt zeigten wir, dass diese Funktion wirklich eine Verteilungsfunktion ist, dieser Fakt kann in dieser Aufgabe benutzt werden.)

(a) Zeigen wir, dass eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit $\mathbb{P}(X < \varepsilon) < 1/2$ existiert.

(b) Sei noch $Y = e^{-X}$. Bestimmen wir die Dichtefunktion und die Standardabweichung von Y .

Megoldás:

a) (6 pont)

1. megoldás.

(1 pont) $\mathbb{P}(X \leq 0) = F_X(0) = e^{-e^{-0}}$

(0 pont) $= 1/e$ (vagy: e^{-1} ; $1/e \approx 0,3679$, de látni fogjuk, hogy a pontos numerikus érték nem olyan fontos. Az előző lépésből az " $= F_X(0)$ " kihagyható és egyből jöhet a képlet, de ha egyből a végeredmény jön, akkor csak 1 pont jár a 2-ből).

(1 pont) Tehát $F_X(0) < 1/2$ (ezt nem kell tovább indokolni akkor sem, ha nem adta meg $1/e$ numerikus értékét, higgyük el, hogy tudja, hogy $e > 2$).

(1 pont) Az eloszlásfüggvény folytonos,

(1 pont) mert... (valahogy megindokolja: pl. azért, mert folytonos függvények kompozíciója, vagy azért, mert minden pontban differenciálható – ha ezt írja, higgyük el neki akár anélkül is, hogy lederiválná – és ezért minden pontban folytonos),

(1 pont) ezért van olyan $\varepsilon > 0$ is, amelyre $F_X(\varepsilon) < 1/2$,

(1 pont) és szintén a folytonosság miatt $\mathbb{P}(X < \varepsilon) = F_X(\varepsilon)$, amiből következik a bizonyítandó állítás.

(Ne vonjunk le pontot, ha egyszer már hivatkozott a folytonosságra és most nem teszi, illetve csak egy pontot vonjunk le összesen, ha nem hivatkozott rá egyáltalán. A legelső 1 pont jár akkor is, ha nem írta oda, hogy $F_X(0) = \mathbb{P}(X \leq 0)$, tehát ennek hiányában akár maximális pontszám is kapható, viszont az utolsó pont csak akkor jár, ha szerepel, hogy $F_X(\varepsilon) = \mathbb{P}(X < \varepsilon)$.)

Alternatív jó megoldások például:

- A folytonosságot a 0-ban alkalmazza és azt írja, hogy $\mathbb{P}(X < 0) = 1/e < 1/2$, és utána (szintén a folytonosság miatt) $\mathbb{P}(X < \varepsilon) < 1/2$ is teljesül, ha $\varepsilon > 0$ elég kicsi. Itt tulajdonképpen nem $x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$, hanem $x \mapsto \mathbb{P}(X < x)$ folytonosságára kell hivatkozni, de ha ez az egyetlen probléma, azért ne vonjunk le pontot.
- A folytonosság helyett arra hivatkozik, hogy $\mathbb{P}(X = c) = 0$ valamilyen $c \in \mathbb{R}$ -re (pl. $c = 0, \varepsilon$ stb.). Ez ugyanúgy jó, de valahogy meg kell indokolni, pl. azzal, hogy X folytonos val. változó, más szavakkal azzal, hogy van sűrűségfüggvénye (erre jár 1 pont a folytonosság helyett), amit szintén meg kell indokolni, pl. azzal, hogy az eloszlásfüggvény mindenütt differenciálható (erre jár 1 pont a folytonosság megindoklása helyett).
- Eljut addig, hogy $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon) < 1/2$ valamely $\varepsilon > 0$ -ra, és utána nem az eloszlásfüggvény folytonosságára hivatkozik, hanem azt mondja, hogy ekkor valamely (bármely) $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ -re $\mathbb{P}(X < \varepsilon') < 1/2$.
(Ez a valószínűség monotonitásából következik, de nem kell indokolni.)

Alternatív „brute force” megoldás, szintén teljes pontszámért: választ valami tetszőleges 0-nál nagyobb ε számot, amire $e^{-e^{-\varepsilon}} < 1/2$ (pl. $\varepsilon = 1/4$ jó). Ebből kijön az, hogy $F_X(\varepsilon) = \mathbb{P}(X \leq \varepsilon) < 1/2$ (4 pont), és ezután meg kell indokolni, hogy ebből miért következik, hogy $\mathbb{P}(X < \varepsilon) < 1/2$ (pl. folytonosság, 1 pont), amit az előbbiekhez hasonlóan szintén meg kell indokolni (1 pont).

Alternatív megoldás megint csak az, hogy $\mathbb{P}(X \leq \varepsilon) < 1/2$ -ből azt vezeti le, hogy akkor valamilyen (bármely) $\varepsilon' \in (0, \varepsilon)$ -ra $\mathbb{P}(X < \varepsilon') < 1/2$.

Ha ezzel próbálkozik, de nem jó ε -t választ, akkor az első 4 pontból max. 2 pont, utána az utolsó 2 pontot még megkaphatja akár mind az indoklás jóságától függően.

(b) (14 pont, ami zárójelben van, azt nem kötelező odaírni)

(1 pont) arra az ötletre, hogy Y sűrűségfüggvénye kiszámításához először az eloszlásfüggvényét kellene meghatározni (akkor is, ha ezután semmi más jó nincs. Ha csak az látszik, hogy az eloszlásfüggvényt próbálja felírni, és szintaktikailag értelmezhető dolgot ír, akkor jár az 1 pont) (1 pont) $\text{Ran}(Y) = [0, \infty)$ (elfogadjuk = helyett $\subseteq$ -val és/vagy $[0, \infty)$ helyett $(0, \infty)$ -vel is. Ha később kiderül, hogy $F_Y(x) = 0$ minden $x < 0$ -ra, akkor ez az 1 pont jár.)

(1 pont) és ezért $F_Y(x) (= \mathbb{P}(Y \leq x)) = 0$ minden $x < 0$ -ra.

(1 pont) Ha $x \geq 0$, akkor $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$

(0 pont) $= \mathbb{P}(e^{-X} \leq x)$

(2 pont) $(= \mathbb{P}(-X \leq \ln x)) = \mathbb{P}(X \geq -\ln x)$

(2 pont) $(= 1 - \mathbb{P}(X < -\ln x) = 1 - F_X(\ln x)) = 1 - e^{-e^{-(\ln x)}} = 1 - e^{-x}$.

(Ebből 1 pont jár a komplementer valószínűségre, 1 pont az átalakításra az azonosságok segítségével. Itt ugye megint használjuk F_X folytonosságát, de többször már nem jár rá pont.)

(2 pont) Tehát $Y \sim \text{Exp}(1)$,

(1 pont) és így (a táblázat alapján) $f_Y(x) = e^{-x}$, ha $x > 0$

(1 pont) és $f_Y(x) = 0$, ha $x \leq 0$ (ha a 0-t a másik szakaszhoz veszi, az is OK),

(1 pont) valamint (szintén a táblázat alapján) $\mathbb{D}^2(Y) = 1$,

(1 pont) és így $\mathbb{D}(Y) = 1$.

Ha az eloszlásfüggvény alapján nem veszi észre, hogy Y exponenciális eloszlású: 1 pont jár arra, hogy $f_Y(x) = 0$, ha $x \leq 0$, 1 pont arra, hogy $x > 0$ esetén $f_Y(x)$ -et az eloszlásfüggvény deriválásával lehet megkapni, és 2 pont arra, hogy ezt a deriválást jól el is végzi.

Ha ezután a sűrűségfüggvényéről sem ismeri fel az exponenciális eloszlást, akkor sajnos sokat kell dolgozni az utolsó 2 pontért, ráadásul fél pontokat nem is adhatunk. A szórás $\mathbb{D}(Y) = \sqrt{\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2}$ képlettel kell meghatározni (0 pont), amihez ki kell számolni $\mathbb{E}(X)$ -et (1 pont, $1 \times$ parc. int. vagy $\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty (1 - F_Y(x))dx$ és $\mathbb{E}(Y^2)$ -et ($2 \times$ parc. int., esetleg az első után kapott képletben fel lehet ismerni a már kiszámolt várható értéket), majd elvégezni a szükséges kivonást és gyökvonást (összesen 1 pont).