Klausur

Allgemeine Regeln: Die Klausur dauert 90 Minuten. Die Benutzung eines (nicht graphischen) Taschenrechners ist erlaubt. Numerische Ergebnisse sollen auf 4 Dezimalstellen gerundet werden. Zum Erreichen der maximalen Punktzahl ist es notwendig, detaillierte Lösungen zu geben und die angewandten Behauptungen, Sätze und Eigenschaften aufzulisten. Es ist verboten, während der ersten 30 Minuten den Raum zu verlassen.

1. Im Wald kommen zwei verschiedene Arten von Kleinkatzen vor: Hauskatzen und Wildkatzen. Die Wildkatzen ergeben 10% der ganzen Population. Alle Wildkatzen und im Durchschnitt eine von 5 Hauskatzen sind getigert[a].

   (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine aus dem Wald zufällig gewählte Katze getigert ist?

   (b) Im Wald erblicken wir zufällig eine getigerte Katze, aber sie ist zu weit, und wir können nicht entscheiden, ob sie eine Wildkatze oder eine Hauskatze ist. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das wir eine Hauskatze sehen?

   (c) Eine Katze wird aus dem Wald zufällig gewählt. Entscheiden wir, ob die folgenden Ereignisse unabhängig sind:
   $A = \{$ die gewählte Katze ist nicht getigert $\}$ und $B = \{$ die gewählte Katze ist eine Hauskatze $\}$.

2. Zwei reelle Zahlen werden im Intervall $[0; 1]$ unabhängig und (uniform) zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Summe der zwei Zahlen größer als zweimal die Differenz der größeren und kleineren Zahl?

3. Anna, Bea und Christa spielen ein Kartenspiel mit einem ungarischen Spielkartenpaket. Nach der Mischung bekommt jede von ihnen (gerade) 8 Karten (und 8 Karten werden nicht verteilt). Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

   (a) es kein Blatt der Farbe "Herz" nach der Verteilung in der Hand von Anna gibt?

   (b) es kein "Herz" nach der Verteilung in den Händen von Bea und Christa gibt?

   (c) jede Spielerin mindestens ein "Herz" nach der Verteilung in ihrer Hand hat?

   (Ein ungarisches Spielkartenpaket besteht aus 32 Blättern, von denen genau 8 Blätter die Farbe "Herz" haben.)

4. Das Organisationskomitee einer Veranstaltung soll zwischen zwei Programmen wählen, sie werden als Programm A und Programm B bezeichnet. Jedes der 9 Mitglieder des Komitees soll für gerade eine Möglichkeit votieren, keine Enthaltung[b] ist möglich. Drei Mitglieder votieren sicherlich fürs Programm A, und zwei Mitglieder wissen schon, dass sie das Programm B wählen werden. Vier Mitglieder sind aber unsicher, deshalb werfen alle von ihnen unabhängig voneinander eine reguläre Münze, und sie votieren folgenderweise: falls der Wurf eines Mitglieds einen Kopf gibt, dann wählt er/sie das Programm A, sonst das Programm B. Sei X die Anzahl der Mitglieder, die fürs Programm A votieren.

   (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine der zwei Optionen mindestens drei Stimmen[c] mehr erhält, als die andere?

   (b) Geben wir die Verteilung der Variablen $X - 3$ zusammen mit ihrem/ihren Pramater(n) an.

   (c) Sei Y die Anzahl der Mitglieder, die das Programm B wählen. Bestimmen wir die gemeinsame Verteilung der Variablen X und Y und die entprechenden Randverteilungen. Geben wir das Ergebnis möglichst in einer Tabelle an (es ist aber auch genügend, die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X = k, Y = l)$, $\mathbb{P}(X = k)$ und $\mathbb{P}(Y = l)$ nur für solche Zahlen k und l anzugeben, für die diese Werte positiv sind).

[a] getigert: cirmos
[b] e Enthaltung,-en: tartózkodás (valamitől)
[c] e Stimme,-n: szavazat

5. Die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X ist durch die Formel

$$f_X(t) = \begin{cases} \dfrac{c}{t^2} & \text{falls } t > 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

angegeben, wo c eine passende Konstante ist.

(a) Bestimmen wir den Wert von c.

(b) Wir definieren die Variable Y folgenderweise:

$$Y = \begin{cases} 3, & \text{falls } X \leq 3, \\ 0, & \text{falls } 3 < X \leq 4, \\ 4, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y = k)$ für jede $k \in \mathbb{R}$, für die dieser Wert positiv ist.

(c) Berechnen wir den Erwartungswert und die Standardabweichung von Y.

*6. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_X \colon \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-x}}$ ($\mathrm{e} \approx 2{,}71\ldots$). (Auf dem 5. Übungsblatt zeigten wir, dass diese Funktion wirklich eine Verteilungsfunktion ist, dieser Fakt kann in dieser Aufgabe benutzt werden.)

(a) Zeigen wir, dass eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit $\mathbb{P}(X < \varepsilon) < 1/2$ existiert.

(b) Sei noch $Y = \mathrm{e}^{-X}$. Bestimmen wir die Dichtefunktion und die Standardabweichung von Y.

Verteilung	Notation	ran$X$	$F_X(t)$	$f_X(k)$, $f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0,1\}$		$1-p$, p	p	$p(1-p)$
Binomialverteilung	Bin$(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$		$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
Poisson-Verteilung	Poi(λ)	$\mathbb{N}$		$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
geometrische Verteilung	Geo(p)	$\mathbb{N}^+$		$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
uniforme Verteilung	U$(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentialverteilung	Exp(λ)	$[0;\infty)$	$1-e^{-\lambda t}$ $(0 \leq t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$