2. Prüfung

Lösungen

1. Geben wir die folgende Definition und Aussage an:
   a) Wie ist die Kovarianzmatrix eines Zufallsvektors $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ definiert?
   b) Sei X eine stetige Zufallsvariable. Nehmen wir an, dass $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine solche Funktion ist, für die der Erwartungswert $\mathbb{E}\left(g(X)\right)$ existiert. Wie kann $\mathbb{E}\left(g(X)\right)$ anhand der Dichtefunktion von X ausgedrückt werden?

Megoldás:
(a)

$$\operatorname{cov}(\underline{X}) = \begin{pmatrix} \operatorname{cov}(X_1, X_1) & \operatorname{cov}(X_1, X_2) & \ldots & \operatorname{cov}(X_1, X_n) \\ \operatorname{cov}(X_2, X_1) & \operatorname{cov}(X_2, X_2) & \ldots & \operatorname{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(X_n, X_1) & \operatorname{cov}(X_n, X_2) & \ldots & \operatorname{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

(4 pont) ha megjelennek a mátrixban a páronkénti kovarianciák
(+3 pont) ha kiderül, hogy $n \times n$-es
(+3 pont) ha minden index jó
(14. előadás, 8. dia) (Ha csak n=2-re írja fel, akkor max 5 pont)

(b)
(10 pont)

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \,\mathrm{d}x$$

(7. előadás, 12. dia) (Ha nincsenek integrálási határok vagy rosszak, akkor -2 pont.)

2. Hans kauft jede Woche 3 Rubbellose. Er wählt immer aus zwei verschiedenen Typen, aber er kauft immer 3 Lose vom gleichen Typ. Beim Typ A gewinnt man im Durchschnitt mit jedem zwölften Rubbellos, während die Gewinnchance beim Typ B 10% ist. Um zu entscheiden, welchen Typ er in einer bestimmten Woche wählt, wirft Hans einen Würfel vor dem Kauf. Wenn er die Augenzahl 1 oder 2 wirft, dann wählt er den Typ A, und sonst wählt er den Typ B.
   a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Hans in einer Woche mit mindestens einem Rubbellos gewinnt?
   b) Angenommen, dass Hans in einer bestimmten Woche (mit mindestens einem Los) gewann, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er Lose vom Typ A kaufte?

Megoldás:
(a)
Tekintsük a következő eseményeket:
(0 pont) A = Hans az adott héten 1-est vagy 2-est dob a dobókockával, W = Hans az adott héten legalább egy sorsjeggyel nyer
(1 pont) $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$
(1 pont) Az A és $\bar{A}$ események teljes eseményrendszert alkotnak
(2 pont) ezért alkalmazható a teljes valószínűség tétele:
(2 pont)

$$\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W \mid A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(W \mid \bar{A})\,\mathbb{P}(\bar{A})$$

(1 pont) $\mathbb{P}(W \mid A)$ a nyerés valószínűsége 3 A típusú sorsjegy esetén
(1 pont) $\mathbb{P}(W \mid A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{W} \mid A)$
(1 pont) $\mathbb{P}(\bar{W} \mid A) = \mathbb{P}(\text{három } A \text{ típusú sorsjegy közül eggyel sem nyer }) = \left(\frac{11}{12}\right)^3$
(1 pont) $\mathbb{P}(W \mid A) = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^3 = \frac{397}{1728} \approx 0{,}2297$
(2 pont) Hasonlóan $\mathbb{P}(W \mid \bar{A}) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 0{,}271$

(1 pont) $\mathbb{P}(W) = \mathbb{P}(W \mid A)\frac{1}{3} + \mathbb{P}(W \mid \bar{A})\frac{2}{3} \approx 0{,}2297 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}271 \cdot \frac{2}{3}$
(1 pont) $\approx 0,2572$

(b)
(1 pont) A kérdés $\mathbb{P}(A \mid W) =?$
(1 pont) A Bayes-tételt alkalmazva
(2 pont)

$$\mathbb{P}(A \mid W) = \frac{\mathbb{P}(W \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(W)}$$

(1 pont) $\approx \dfrac{0{,}2297 \cdot \frac{1}{3}}{0{,}2572}$
(1 pont) $\approx 0{,}2977$

3. Kapitän Hering war 20 Jahre alt, als er begann, mit seinem Schiff zu fischen. Am Ende jedes Jahres verglichen er und die anderen Fischer die Gesamtgewichte der Fische, die verschiedene Schiffe fingen. Sie stellten fest, dass der Durchschnitt des jährlichen Gesamtgewichts für ein Schiff 150 Tonne ist, und dass die Standardabweichung dieses Gewichts 30 Tonne ist. Diese Verteilung veränderte sich nicht in den vergangenen Jahren, und die Fänge verschiedener Jahre sind unabhängig voneinander. Herr Hering lernte aber Wahrscheinlichkeitstheorie in seiner Freizeit, und er berechnete, dass die Standardabweichung des Gesamtgewichts aller Fische, die ein einziges Schiff während der ganzen Karriere des Kapitäns fischte, 150 Tonne ist.
a) Wie alt ist der Kapitän?
b) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gesamtgewicht der während Herings Karriere gefangenen Fische bei einem Schiff den Erwartungswert dieses Gewichts um mehr als 3% übersteigt?

Megoldás:
(a)
(0 pont) Jelölje X_i az adott hajó éves fogásának össztömegét az i-edik évben, n az eltelt évek számát
(1 pont) $\mathbb{D}(X_i) = 30$
(1 pont) $\mathbb{D}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = 150$
(1 pont) X_i-k független, azonos eloszlásúak
(2 pont) ezért $150^2 = \mathbb{D}^2\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{D}^2(X_i) = n \cdot 30^2$
(1 pont) $n = 25$
(1 pont) A kapitány tehát $20 + 25 = 45$ éves. ($20 + 24 = 44$-re is jár a pont)

(b)
(1 pont) $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i - \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right) > 0.03 \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right)\right) =?$
/vagy $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i > 1.03 \cdot \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{25} X_i\right)\right) =?$/
(1 pont) $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{25} X_i) = 25 \cdot \mathbb{E}(X_1) = 3750$
(2 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{25} X_i)}{\mathbb{D}(\sum_{i=1}^{25} X_i)} > \frac{0.03 \cdot \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{25} X_i)}{\mathbb{D}(\sum_{i=1}^{25} X_i)}\right) =?$$

(1 pont) tehát a kérdés

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 3750}{150} > \frac{0.03 \cdot 3750}{150}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 3750}{150} > 0,75\right)$$

(1 pont) $= 1 - \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 3750}{150} < 0,75\right)$
(1 pont) $X_1, \ldots, X_{25}$ azonos eloszlású, együttesen független valószínűségi változók
(1 pont) ezért a centrális határeloszlás-tétel miatt
(2 pont) $\frac{\sum_{i=1}^{25} X_i - 3750}{150}$ közelítőleg standard normális eloszlású.
(2 pont) Tehát a keresett mennyiség: $1 - \Phi(0,75)$
(1 pont) $\approx 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$.

4. Wenn der Nikolaus am 6. Dezember zum letzten Haus ankommt, bemerkt er, dass die hungrigen Rentiere fast alle Geschenke von seinem Sack ausaßen, und deshalb blieben nur zwei verschiedene Schokoladen dort. Im Haus leben 4 Kinder, und jedes Kind stellte (genau) einen Stiefel vor den Tür. Aber die Schokoladen sind nicht aufteilbar, also legt der Nikolaus jede Schokolade in einem zufällig gewählten Stiefel ein. (Die zwei Wahlen sind unabhängig, und es kann passieren, dass ein Kind beide Schokoladen bekommt.) Dann geht er schnell weg, bevor die Kinder aufwachen.
Zwei von diesen Kindern, Andrea und Beate sind eifersüchtig aufeinander, deshalb beachten sie immer sehr auf die Geschenke, die das andere Kind bekommt. Sei X die Anzahl der Schokoladen, die Andrea bekommt, und sei Y die Indikatorvariable des Ereignisses, dass Andrea und Beate gleich viele Schokoladen bekommen.
a) Geben wir die gemeinsame Verteilung von X und Y. Sind diese Variablen unabhängig?
b) Geben wir die Kovarianz von X und Y, und auch die Varianz von $Z = -2X + 3$.

Megoldás:
(a)
(3 pont) Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat írja le:

Y \ X	0	1	2	Y peremeloszlása
0	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{8}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$
X peremeloszlása	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$	

(2 pont) nem függetlenek, ami pl abból látszik, hogy
$0 = \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) \neq \mathbb{P}(X = 2) \cdot \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{8}$ (más jó indoklásra is jár a pont)
(b)
(2 pont) $\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
(1 pont) a megoldó tudja a várható érték definícióját
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(Y) = \frac{3}{8}$
(2 pont) $\mathbb{E}(XY) = \sum_{i,j} i \cdot j \cdot \mathbb{P}(X = i, Y = j)$
(ha nem írja így le, de a konkrét esetben jól használja, akkor is jár a pont)
(1 pont) $\mathbb{E}(XY) = \frac{1}{8}$
(1 pont) Tehát $\operatorname{cov}(X, Y) = -\frac{1}{16}$
(2 pont) $\mathbb{D}^2(Z) = \mathbb{D}^2(-2X + 3) = 4\,\mathbb{D}^2(X)$
(vagy $\mathbb{D}(Z) = \mathbb{D}(-2X + 3) = 2\,\mathbb{D}(X)$, de ha -2-vel szoroz 0 pont)
(2 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}\,X)^2$
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \frac{5}{8}$
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X) = \frac{3}{8}$
(1 pont) $\mathbb{D}^2(Z) = \frac{3}{2}$

5. Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(s,t) = \begin{cases} \alpha \cdot e^{-3s-2t} & \text{falls } 0 < s \text{ und } 0 < t, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen wir den Wert von α.
b) Geben wir die Regression $\mathbb{E}(X \cdot Y + 2 \cdot X^2 \frac{1}{Y} + 1 | Y)$ an.

Megoldás:
(a)
(2 pont) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$
(1 pont) Tehát $1 = \int_0^\infty \int_0^\infty \alpha \cdot e^{-3x-2y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \alpha \cdot e^{-2y} \cdot \left[\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^\infty \mathrm{d}y =$
(1 pont) $= \int_0^\infty \alpha \cdot e^{-2y} \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}y = \alpha \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{e^{-2y}}{-2}\right]_0^\infty = \alpha \cdot \frac{1}{6}$
(1 pont) $\alpha = 6$

(b)
(1 pont) az együttes sűrűségfüggvény szorzatalakba írható: $f_{X,Y}(x,y) = (3 \cdot e^{-3x}) \cdot (2 \cdot e^{-2y})$
(1 pont) tehát X és Y függetlenek
(2 pont) $f_X(x) = 3 \cdot e^{-3x}$, ha $x > 0 \longrightarrow X \sim E(3)$, és $f_Y(y) = 2 \cdot e^{-2y}$, ha $y > 0 \longrightarrow Y \sim E(2)$
(1 pont) a regresszió linearitása alapján
(1 pont) $\mathbb{E}(X \cdot Y + 2 \cdot X^2 \frac{1}{Y} + 1 \mid Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y \mid Y) + \mathbb{E}(2 \cdot X^2 \frac{1}{Y} \mid Y) + 1$
(2 pont) $= Y \cdot \mathbb{E}(X \mid Y) + 2 \cdot \frac{1}{Y} \cdot \mathbb{E}(X^2 \mid Y) + 1$
(1 pont) mert... (a megoldó valahogy hivatkozik a regresszió megfelelő tulajdonságára)
(1 pont) $\mathbb{E}(X \mid Y) = \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2 \mid Y) = \mathbb{E}(X^2)$
(2 pont) mert függetlenek
(1 pont) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{9}$
(1 pont) $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{D}^2(X) + (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2}{9}$
(1 pont) A kérdezett regresszió tehát $= Y \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{Y} \cdot \frac{2}{9} + 1 = \frac{1}{3}Y + \frac{4}{9}\frac{1}{Y} + 1$

6.* Immer wenn Onkel Otto einen Stab zerbricht, die Bruchstelle wird ein uniform verteilter Punkt auf dem mittleren Drittel des Stabs. Nehmen wir an, dass Onkel Otto einen 15 Zentimeter langen Stab zerbricht, und danach zebricht er auch das Stück, das in seiner linken Hand bleibt. Geben wir die Dichtefunktion der Länge des Stücks an, das am Ende (nach dem zweiten Bruch) in seiner linken Hand bleibt.

Megoldás:
(1 pont) Jelölje az első töréspontnak a bot bal végétől vett távolságát X, erre $X \sim U(5, 10)$
(2 pont) A második töréspontnak a bot bal végétől vett távolsága Y, erre $Y \sim U\left(\frac{X}{3}, \frac{2X}{3}\right)$
(0 pont) a kérdés $f_Y(y) =?$
(3 pont) folytonos teljes valószínűség tétele: $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(y|x) f_X(x)\,\mathrm{d}x$
(1 pont) $f_X(x) = \frac{1}{5}$, ha $x \in (5, 10)$, különben 0
(2 pont) $f_{Y|X}(y|x) = \frac{3}{x}$, ha $5 < x < 10$ és $\frac{x}{3} < y < \frac{2x}{3}$, különben 0
(3 pont) $f_Y(y) = \int_{\max(5,\frac{3}{2}y)}^{\min(10,3y)} \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{5}\,\mathrm{d}x$
(2 pont) $= \frac{3}{5} \cdot [\ln x]_{\max(5,\frac{3}{2}y)}^{\min(10,3y)}$,
(2 pont) ha $\frac{5}{3} < y < \frac{20}{3}$, különben 0
(2 pont) ha $\frac{5}{3} < y < \frac{10}{3}$, akkor $f_Y(y) = \frac{3}{5} \cdot [\ln x]_5^{3y} = \frac{3}{5} \cdot \ln \frac{3y}{5}$
(2 pont) ha $\frac{10}{3} \leq y < \frac{20}{3}$, akkor $f_Y(y) = \frac{3}{5} \cdot [\ln x]_{\frac{3}{2}y}^{10} = \frac{3}{5} \cdot \ln \frac{20}{3y}$