1. Prüfung

Lösungen

1. Geben wir die folgende Definition und Behauptung:
   (a) Wie ist die Varianz einer Zufallsvariablen definiert?
   (b) Unter welchen Bedingungen und wie kann der Erwartungswert des Produkts von zwei Zufallsvariablen X und Y anhand der Erwartundswerte $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$ (nach der in der Vorlesung gegebenen Behauptung) ausgedrückt werden?

   Megoldás:

   (a)

   (10 pont) Egy valószínűségi változó szórásnégyzete (die Varianz):

   $$\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$$

   (Ha csak az szerepel, hogy saját magával vett kovarianciája, akkor 3 pont.)
   (Ha a $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ formulát adja meg (hibátlanul), akkor 3 pont.)
   (8. előadás első definíciója)

   (b)

   (4 pont) Ha X és Y független valószínűségi változók, és
   (2 pont) $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{E}(X)$ és $\mathbb{E}(Y)$ véges,
   (4 pont) akkor
   $$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$
   (9. előadás 9. dia)

   (A feltételek felírásáért akkor jár a pont, ha az állítás is szerepel.)

2. Wir mischen vier Spielkartenblätter, von denen genau ein Blatt rot ist, und dann legen wir den Stapel der vier Karten auf den Tisch. Danach werfen wir eine Münze höchstens viermal, aber nur bis zur ersten Zahl. Wir halten also nach der ersten Zalh oder (wenn vier Köpfe geworfen werden, dann) nach dem vierten Wurf an. Endlich ziehen wir so viele Blätter aus dem Kartenstapel nacheinander, wie die Anzahl der geworfenen Köpfe ist. (Wir ziehen immer das obere Blatt des Stapels, und wenn kein Kopf geworfen wurde, dann ziehen wir kein Blatt.) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das vier Köpfe geworfen wurden, wenn es bekannt ist, dass das rote Blatt herausgezogen wurde?

   Megoldás:
   Tekintsük a következő eseményeket:
   (0 pont) Pi=a húzott lapok között szerepel a piros, F_i=i darab fejet dobunk, pontosabban az első i dobás fej, és $i < 4$ esetén az $(i+1)$-edik írás $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$.
   (1 pont) A kérdezett valószínűség $\mathbb{P}(F_4|Pi)$
   (1 pont) az egyszerű Bayes-tételből
   (2 pont) $\mathbb{P}(F_4|Pi) = \dfrac{\mathbb{P}(Pi|F_4)\,\mathbb{P}(F_4)}{\mathbb{P}(Pi)}$
   (1 pont) A teljes valószínűség tételéből
   (2 pont)
   $$\mathbb{P}(Pi) = \sum_{i=0}^{4} \mathbb{P}(Pi \mid F_i)\,\mathbb{P}(F_i)$$
   (Ha nem két lépésben írja le, hanem azonnal a Bayes-tételt helyesen és arra hivatkozik, akkor is jár a pont.)
   (1 pont) Ha $i < 4$, akkor $\mathbb{P}(F_i) = \dfrac{1}{2^{i+1}}$
   (1 pont) $\mathbb{P}(F_4) = \dfrac{1}{2^4}$

(1 pont) Ha nem dobunk fejet, akkor persze nem húzhatunk pirosat, így $\mathbb{P}(Pi \mid F_0) = 0$
(1 pont) Ha 4 fejet dobunk, akkor biztosan kihúzzuk a piros lapot, azaz $\mathbb{P}(Pi \mid F_4) = 1$
(1 pont) $\mathbb{P}(Pi \mid F_1) = \dfrac{1}{4}$
(2-2 pont) valamint (számításba véve, hogy hanyadikra húznuk pirosat)

$$\mathbb{P}(Pi \mid F_2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(Pi \mid F_3) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

(vagy ha a húzás sorrendjét nem vesszük figyelembe:

$$\mathbb{P}(Pi \mid F_2) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(Pi \mid F_3) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

így kiszámolva is nyilván ugyanannyi pontot ér)
(2 pont) Behelyettesítve

$$\mathbb{P}(Pi) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^4} + 1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{4+4+3+4}{64} = \frac{15}{64}.$$

(2 pont) Tehát $\mathbb{P}(F_4|Pi) = \dfrac{1 \cdot \frac{1}{2^4}}{\frac{15}{64}} = \dfrac{4}{15}$

3. Ein Computerprogramm erzeugt eine *ganze* Zahl zufällig und gleichverteilt im Intervall $[1; 5]$ (also gibt das Programm jede ganze Zahl in diesem Intervall mit Wahrscheinlichkeit $1/5$). Nehmen wir an, dass 1000 Zahlen unabhängig voneinander durch dieses Programm erzeugt werden, und danach summieren wir diese 1000 Zahlen auf. Berechnen wir die (approximative) Wahrscheinlichkeit dafür, das diese Summe größer als 2900 und kleiner als 3100 ist. *Megoldás:*

(0 pont) Jelölje X_i az i-edik generált számot
(1 pont) $\mathbb{P}(2900 < \sum_{i=1}^{1000} X_i < 3100) = ?$
(2 pont) Sztenderdizálunk:

$$\mathbb{P}\left(\frac{2900 - \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{1000} X_i)}{\mathbb{D}(\sum_{i=1}^{1000} X_i)} < \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{1000} X_i)}{\mathbb{D}(\sum_{i=1}^{1000} X_i)} < \frac{3100 - \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{1000} X_i)}{\mathbb{D}(\sum_{i=1}^{1000} X_i)}\right) = ?$$

(1 pont) $X_1, \ldots, X_{1000}$ azonos eloszlású, együttesen független valószínűségi változók
(1 pont) ezért $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{1000} X_i) = 1000 \cdot \mathbb{E}(X_1)$ és $\mathbb{D}(\sum_{i=1}^{1000} X_i) = \sqrt{1000} \cdot \mathbb{D}(X_1)$
(1 pont) X_1 értékkészlete $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, és mindegyik értéket $1/5$ valószínűséggel veszi fel
(1 pont) $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$
(2 pont) $\mathbb{D}^2(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2$
(1 pont) $\mathbb{E}(X_1^2) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} = \frac{1+4+9+16+25}{5} = \dfrac{55}{5} = 11$
(1 pont) $\mathbb{D}^2(X_1) = 11 - 9 = 2$
(1 pont) tehát a kérdés

$$\mathbb{P}\left(\frac{-100}{\sqrt{2000}} < \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000 \cdot 3}{\sqrt{1000} \cdot \sqrt{2}} < \frac{100}{\sqrt{2000}}\right) \approx \mathbb{P}\left(-2{,}24 < \frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000 \cdot 3}{\sqrt{1000} \cdot \sqrt{2}} < 2{,}24\right)$$

(1 pont) a centrális határeloszlás-tétel miatt
(2 pont) $\frac{\sum_{i=1}^{1000} X_i - 1000 \cdot 3}{\sqrt{1000} \cdot \sqrt{2}}$ közelítőleg standard normális eloszlású.
(2 pont) Tehát a keresett mennyiség: $\Phi(2{,}24) - \Phi(-2{,}24)$
(2 pont) Mivel $\Phi(-2{,}24) = 1 - \Phi(2{,}24)$
(1 pont) ezért a keresett mennyiség $2 \cdot \Phi(2{,}24) - 1 \approx 2 \cdot 0{,}9875 - 1 = 0{,}975$.

4. Sei $X \sim \mathrm{Bin}(10; 0{,}2)$ eine binomialverteilte Zufallsvariable, und seien noch $Y = 3X + 2$ und $Z = 5 - 2X$.

   (a) Berechnen wir den Korrelazionskoeffizient von Y und Z.

   (b) Bestimmen wir die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $(Y + Z, Y - Z)$.

Megoldás:
(a)
(4 pont) Y a Z-nek is lineáris transzformáltja: $Y = -\frac{3}{2}Z + \frac{19}{2}$
(3 pont) (mindkét változó szórása pozitív és véges), így a tanult tétel alapján $\mathrm{corr}(Y, Z) = \pm 1$
(3 pont) az előjelet a Z együtthatójának előjele határozza meg
(1 pont) tehát $\mathrm{corr}(Y, Z) = -1$.

(*második megoldás*: A korreláció a definíció alapján is kiszámítható
(2 pont) $\mathrm{corr}(Y, Z) = \dfrac{\mathrm{cov}(Y, Z)}{\mathbb{D}(Y)\,\mathbb{D}(Z)}$
(1 pont) $\mathbb{D}(X) = \sqrt{10 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = \sqrt{1{,}6}$
(1 pont) $\mathbb{D}(Y) = \mathbb{D}(3X + 2) = \mathbb{D}(3X) = 3\,\mathbb{D}(X) = 3\sqrt{1{,}6}$
(1 pont) $\mathbb{D}(Z) = \mathbb{D}(5 - 2X) = \mathbb{D}(-2X) = 2\,\mathbb{D}(X) = 2\sqrt{1{,}6}$
(2 pont) $\mathrm{cov}(Y, Z) = \mathrm{cov}(3X + 2, 5 - 2X) = -6 \cdot \mathrm{cov}(X, X)$
(2 pont) Továbbá $\mathrm{cov}(X, X) = \mathbb{D}^2(X) = 1{,}6$
(1 pont) tehát $\mathrm{corr}(Y, Z) = \dfrac{-6 \cdot 1{,}6}{3 \cdot \sqrt{1{,}6} \cdot 2 \cdot \sqrt{1{,}6}} = -1$)

(b)
(2 pont) tudja, hogy mik a kovarianciamátrix elemei
(2 pont) $Y + Z = X + 7$, $Y - Z = 5X - 3$
(2 pont) $\mathbb{D}^2(Y + Z) = \mathbb{D}^2(X) = 1{,}6$ $\qquad \mathbb{D}^2(Y - Z) = 25\,\mathbb{D}^2(X) = 25 \cdot 1{,}6 = 40$
(3 pont) $\mathrm{cov}(Y + Z, Y - Z) = \mathrm{cov}(X + 7, 5X - 3) = 5 \cdot \mathrm{cov}(X, X) = 5 \cdot \mathbb{D}^2(X) = 8$
(1 pont) a kovariancia mátrix tehát

$$\begin{pmatrix} 1,6 & 8 \\ 8 & 40 \end{pmatrix}.$$

5. Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(s, t) = \begin{cases} 10s^2 t & \text{falls } 0 < t < s < 1, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

Bestimmen wir die Dichtefunktion der Variablen X, die Regression $\mathbb{E}(Y \mid X)$ und den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$.

Megoldás:
(2 pont) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}y$
(Ha a fenti egyenlet implicit jelenik meg az f_X kiszámolásában, akkor is jár a pont.)
(1+1 pont) $= \int_0^x (10x^2 y)\,\mathrm{d}y$ (az integrálási határért jár az egyik pont)
(1 pont) $= 5x^4$
(1 pont) ha $0 < x < 1$, különben 0.
(3 pont) $\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{Y|X}(y \mid x)\,\mathrm{d}y$
(2 pont) $f_{Y|X}(y \mid x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$ (ahol $f_X(x) \neq 0$)
(1 pont) $= \frac{10x^2 y}{5x^4} = \frac{2y}{x^2}$
(1 pont) Tehát $\mathbb{E}(Y \mid X = x) = \int_0^x y \cdot \frac{2y}{x^2}\,\mathrm{d}y$
(1 pont) $= \frac{2}{3}x$, (ha $0 < x < 1$ és 0 egyébként)
(1 pont) A val. változó X-et visszahelyettesítve: $\mathbb{E}(Y \mid X) = \frac{2}{3}X$
(2 pont) $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(Y \mid X = x) f_X(x)\,\mathrm{d}x$
(vagy $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$)
(Ha a fenti egyenlet implicit jelenik meg az f_X kiszámolásában, akkor is jár a pont.)
(további 3 pont arányosan)
$\mathbb{E}(Y) = \frac{5}{9} = 0{,}5555$
(Ha csak hányados, vagy csak tizedestört alakban van megadva a megoldás, akkor is jár a pont.)

6.* Wir warten auf ein wichtiges Paket, das durch das Versandunternehmen LINK versandt wurde. Die Firma stellt das Paket verspätet zu, und die Verspätung (in Stunden gemessen) ist uniformverteilt auf dem Intervall $(0;1)$. Bei einer Verspätung von x Stunden bezahlt die Firma eine Entschädigung, deren Wert in Euro uniformverteilt auf dem Intervall $(20(x-x^2);20x)$ ist. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das wir eine Entschädigung von weniger als 5 Euro bekommen?

Megoldás:
(0 pont) Jelölje X az órában mért késést, Y a kártérítés összegét tízezer euroban mérve
(1 pont) $\mathbb{P}(Y<5)=?$
(5 pont) a teljes valószínűség tétele alapján

$$\mathbb{P}(Y<5)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{P}(Y<5|X=x)\cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

(2 pont) $\mathbb{P}(Y<5|X=x)=1$, ha $20x<5$, azaz ha $x<0{,}25$
(2 pont) $\mathbb{P}(Y<5|X=x)=\int_{20(x-x^2)}^{5} f_{Y|X}(y|x)\,\mathrm{d}y$, ha $x\geq 0{,}25$
(2 pont)

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{20x^2} & \text{ha } 20(x-x^2)<y<20x\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

(3 pont) $\mathbb{P}(Y<5|X=x)=\int_{20(x-x^2)}^{5}\frac{1}{20x^2}\,\mathrm{d}y=\frac{5-20(x-x^2)}{20x^2}=\frac{x^2-x+0{,}25}{x^2}$, ha $x\geq 0{,}25$
(3 pont) $\mathbb{P}(Y<5)=\int_0^{0{,}25}1\cdot 1\,\mathrm{d}x+\int_{0{,}25}^{1}\frac{x^2-x+0.25}{x^2}\cdot 1\,\mathrm{d}x=1{,}75+\ln 0{,}25=$
(2 pont) $=0{,}3637$