1. Prüfung

Allgemeine Regeln: Die Prüfung dauert 100 Minuten. Die Benutzung eines (nicht graphischen) Taschenrechners ist erlaubt. Numerische Ergebnisse müssen auf 4 Dezimalstellen gerundet werden. Zum Erreichen der maximalen Punktzahl ist es notwendig, detaillierte Lösungen zu geben und die angewandten Behauptungen, Sätze und Eigenschaften aufzulisten. Es ist verboten, während der ersten 30 Minuten den Raum zu verlassen.

1. Geben wir die folgende Definition und Behauptung:
   (a) Wie ist die Varianz einer Zufallsvariablen definiert?
   (b) Unter welchen Bedingungen und wie kann der Erwartungswert des Produkts von zwei Zufallsvariablen X und Y anhand der Erwartundswerte $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$ (nach der in der Vorlesung gegebenen Behauptung) ausgedrückt werden?

2. Wir mischen vier Spielkartenblätter, von denen genau ein Blatt rot ist, und dann legen wir den Stapel der vier Karten auf den Tisch. Danach werfen wir eine Münze höchstens viermal, aber nur bis zur ersten Zahl. Wir halten also nach der ersten Zalh oder (wenn vier Köpfe geworfen werden, dann) nach dem vierten Wurf an. Endlich ziehen wir so viele Blätter aus dem Kartenstapel nacheinander, wie die Anzahl der geworfenen Köpfe ist. (Wir ziehen immer das obere Blatt des Stapels, und wenn kein Kopf geworfen wurde, dann ziehen wir kein Blatt.) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das vier Köpfe geworfen wurden, wenn es bekannt ist, dass das rote Blatt herausgezogen wurde?

3. Ein Computerprogramm erzeugt eine *ganze* Zahl zufällig und gleichverteilt im Intervall $[1; 5]$ (also gibt das Programm jede ganze Zahl in diesem Intervall mit Wahrscheinlichkeit $1/5$). Nehmen wir an, dass 1000 Zahlen unabhängig voneinander durch dieses Programm erzeugt werden, und danach summieren wir diese 1000 Zahlen auf. Berechnen wir die (approximative) Wahrscheinlichkeit dafür, das diese Summe größer als 2900 und kleiner als 3100 ist.

4. Sei $X \sim \mathrm{Bin}(10; 0{,}2)$ eine binomialverteilte Zufallsvariable, und seien noch $Y = 3X+2$ und $Z = 5-2X$.
   (a) Berechnen wir den Korrelazionskoeffizient von Y und Z.
   (b) Bestimmen wir die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors $(Y + Z, Y - Z)$.

5. Sei (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(s,t) = \begin{cases} 10s^2t & \text{falls } 0 < t < s < 1, \\ 0 & \text{ansonsten.} \end{cases}$$

   Bestimmen wir die Dichtefunktion der Variablen X, die Regression $\mathbb{E}(Y \mid X)$ und den Erwartungswert $\mathbb{E}(Y)$.

6.* Wir warten auf ein wichtiges Paket, das durch das Versandunternehmen LINK versandt wurde. Die Firma stellt das Paket verspätet zu, und die Verspätung (in Stunden gemessen) ist uniformverteilt auf dem Intervall $(0; 1)$. Bei einer Verspätung von x Stunden bezahlt die Firma eine Entschädigung, deren Wert in Euro uniformverteilt auf dem Intervall $(20(x - x^2); 20x)$ ist. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das wir eine Entschädigung von weniger als 5 Euro bekommen?

Verteilung	Notation	ran$X$	$\mathbb{P}(X=k)$ / $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{D}^2(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0,1\}$	$1-p,\ p$	-	p	$p(1-p)$
Binomialverteilung	$\mathrm{Bin}(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	-	np	$np(1-p)$
Poisson-Verteilung	$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	-	λ	λ
geometrische Verteilung	$\mathrm{Geo}(p)$	$\mathbb{N}^+$	$(1-p)^{k-1}p$	-	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
uniforme Verteilung	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}\ (t\in(a;b))$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentialverteilung	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0;\infty)$	$1-e^{-\lambda t}\ (0\le t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normalverteilung	$N(\mu;\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
n-dim. Normalvert.	$N(\underline{\mu};\Sigma)$	$\mathbb{R}^n$	$f_{\underline{X}}(\underline{t})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\det\Sigma}}e^{-\frac{1}{2}(\underline{t}-\underline{\mu})^T\Sigma^{-1}(\underline{t}-\underline{\mu})}$		$\underline{\mu}$	Σ

Standardnormalverteilungstabelle

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998