

Wiederholung der Klausur (Pótló zárthelyi dolgozat)

Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontoszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontoszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontoszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozathoz nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontoszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírtól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Seien A und B Ereignisse, für die $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{1}{2}$ gilt. Sei noch C ein solches Ereignis, für das die Ereignispaare A und C bzw. B und C unabhängig sind, und nehmen wir auch an, dass die drei Ereignisse gleichzeitig nicht auftreten können. Berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A , B und C , wenn wir wissen, dass $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{8}$ und $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \frac{19}{40}$ gelten.

Megoldás:

(2 pont) Definíció szerint $\frac{1}{2} = \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

(1 pont) tehát $\mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A \cap B)$

(1 pont) ugyanígy $\mathbb{P}(A) = 2\mathbb{P}(A \cap B)$

(1 pont) amiből egyrészt $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ is következik,

(1 pont) másrészt a Poincaré-formulát alkalmazva

(2 pont) $\frac{3}{8} = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

(1 pont) amiből a fentiek alapján: $\frac{3}{8} = \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{2}\mathbb{P}(A)$

(1-1 pont) így $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$ és mivel egyenlőek, ezért $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$

A Poincaré-formulát alkalmazva

(2 pont)

$$\frac{19}{40} = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

(2 pont) $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$, hiszen egyszerre nem következhetnek be.

(2 pont) A függetlenség miatt $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$ és $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$

A fenti egyenlet tehát így alakul

(1 pont)

$$\frac{19}{40} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \mathbb{P}(C) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \mathbb{P}(C) - \frac{1}{4} \mathbb{P}(C) + 0$$

(2 pont) ahonnan $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{5}$

2. In einer Kneipe sind die Bierflaschen in drei Kästen gestellt. Im ersten Kasten gibt es 12 Falschen Krombacher und 12 Flaschen Paulaner, im zweiten Kasten 16 Flaschen Krombacher und 8 Flaschen Paulaner, und im dritten Kasten 6 Flaschen Krombacher und 18 Flaschen Paulaner. Der Kretschmer läuft nicht gern überflüssig herum, also nimmt er eine zufällig gewählte Flasche aus dem nächstliegenden ersten Kasten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, wenn jemand ein Bier bestellt. Er geht aber mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ zum zweiten Kasten, und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ sogar bis zum weitesten dritten Kasten, um eine zufällig gewählte Flasche auszunehmen.

- (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gast, der ein Bier bestellt, ein Paulaner bekommt?
 (b) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kretschmer die Flasche aus dem dritten Kasten wählte, wenn wir wissen, dass der Gast ein Paulaner bekam?

Megoldás:

Tekintsük a következő eseményeket:

(1 pont) B =Paulanert kap a vendég, A_i =a kocsmáros az i . rekeszből vesz ki egy sört, $i = 1, 2, 3$

(a) $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{6}$ adottak, a kért valószínűség $\mathbb{P}(B)$

(1 pont) Az A_1, A_2, A_3 események teljes eseményrendszer alkotnak,

(1 pont) így a teljes valószínűség tételéből

(2 pont) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2)\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(B|A_3)\mathbb{P}(A_3)$

(2-2-2 pont) $\mathbb{P}(B|A_1) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B|A_2) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B|A_3) = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$

(2 pont) Behelyettesítve: $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}$

(1 pont) $\mathbb{P}(B) = \frac{35}{72} (\approx 0,4861)$

(b)

(1 pont) A kért valószínűség $\mathbb{P}(A_3|B)$

(1 pont) Bayes-tételből

(2 pont) $\mathbb{P}(A_3|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_3)\mathbb{P}(A_3)}{\mathbb{P}(B)}$

(2 pont) behelyettesítve: $\mathbb{P}(A_3|B) = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{35}{72}} = \frac{9}{35} (\approx 0,2571)$

3. Wir wählen zwei Zahlen zufällig und unabhängig voneinander auf dem Intervall $(0;3)$. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Quotient der ersten und zweiten Zahl zwischen $\frac{1}{3}$ und 3 liegt?

Megoldás:

(2 pont) A véletlen kísérlet megegyezik egy pont választásával a $[0, 3] \times [0, 3]$ négyzetben.

(2 pont) Ez az Ω eseménytér.

(4 pont) A kedvező terület ezen téglalapnak az $y = \frac{1}{3}x$ és az $y = 3x$ egyenes közé eső része.

(0 pont) jó ábra (ha egyértelműen kiolvashatók belőle, járhat pont az ábra alapján más részekre is)

(4 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség = $\frac{T_{kedvezo}}{T_{\Omega}}$

(2 pont) $T_{\Omega} = 3 \cdot 3 = 9$

(2 pont) Most célszerű a nem kedvező területet kiszámolni, ami két derékszögű háromszög egyenként $\frac{3 \cdot 1}{2}$ területűek.

(1 pont) $T_{kedvezo} = T_{\Omega} - T_{kedvezotlen}$

(1 pont) $T_{kedvezo} = 9 - 2 \cdot \frac{3 \cdot 1}{2} = 6$

(Ha másképp számolja ki jól a kedvező terület nagyságát, akkor is járnak a pontok.)

(2 pont) A kért valószínűség tehát $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

4. Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X ist durch die Formel

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 0, \\ \sqrt{\frac{t}{c}}, & \text{falls } 0 < t \leq c, \\ 1, & \text{falls } c < t \end{cases}$$

gegeben, wo $c > 0$ eine positive reelle Zahl ist. Bestimmen wir den Wert von c , wenn wir wissen, dass $\mathbb{E}(X) = 1$ gilt.

Megoldás:

$$(2 \text{ pont}) \mathbb{E} X = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt$$

(2 pont) az f_X sűrűségfüggvény az eloszlásfüggvény deriválásával kapható meg

$$(2 \text{ pont}) f_X(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{c}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{c}$$

$$(2 \text{ pont}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{c \cdot t}}, \text{ ha } 0 < t \leq c$$

$$(2 \text{ pont}) f_X(t) = 0 \text{ különben}$$

$$(2 \text{ pont}) 1 = \mathbb{E} X = \int_0^c t \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{c \cdot t}} dt$$

$$(2 \text{ pont}) = \int_0^c \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{c}} dt$$

$$(2 \text{ pont}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{c}} \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^c$$

$$(2 \text{ pont}) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{2}{3} c^{\frac{3}{2}} = \frac{c}{3}$$

$$(2 \text{ pont}) \text{ tehát } c = 3$$

5. In einem Gesellschaftsspiel würfelt der Spieler, der an der Reihe ist, und rückt entsprechend viele Felder mit seinem Figur vor, außer wenn eine Sechs gewürfelt wird. In diesem Fall würfelt der Spieler nämlich erneut bis zum ersten Wurf, der nicht eine Sechs ist. Abschließend summiert er die Ergebnisse aller Würfe auf, und rückt dementsprechend vor. Bestimmen wir den Erwartungswert der Anzahl der Felder, die von einem Spieler in einem Rund vorgerückt werden.

Megoldás:

Jelölje X a kockadobások számát, Y az utolsó dobás értékét és Z a játékos lépéseinek számát.

(3 pont) $X \sim \text{Geo}\left(\frac{5}{6}\right)$ (2 pont, hogy geometriai, 1 pont a paraméter)

(1 pont) $1 \leq i \leq 5$ esetén

$$\mathbb{P}(Y = i) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y = i, X = k)$$

$$(1 \text{ pont}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^k$$

$$(1 \text{ pont}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{6}}$$

$$(1 \text{ pont}) \text{ azaz } \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{5}, \text{ ha } i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(3 \text{ pont}) Z = (X - 1) \cdot 6 + Y$$

$$(3 \text{ pont}) \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(6(X - 1) + Y) = 6\mathbb{E}(X) - 6 + \mathbb{E}(Y)$$

$$(2 \text{ pont}) \mathbb{E}(X) = \frac{6}{5}, \text{ mert geometriai}$$

$$(2 \text{ pont}) \mathbb{E}(Y) = \sum_i i \cdot \mathbb{P}(Y = i)$$

$$(2 \text{ pont}) \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{5}1 + \frac{1}{5}2 + \frac{1}{5}3 + \frac{1}{5}4 + \frac{1}{5}5 = 3$$

$$(1 \text{ pont}) \mathbb{E}(Z) = \frac{21}{5} = 4,2$$

- 6.* Nehmen wir an, dass die Motore eines Flugzeugs während des Fluges unabhängig voneinander einzeln mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ kaputtgehen. Für welche Werte von p wird ein Flugzeug mit 5 Motoren sicherer, als eines mit 3 Motoren, wenn ein Flugzeug beim Flug mindestens die Hälfte seiner Motore benötigt?

Megoldás:

A hárommotoros gép akkor tud repülni, ha legalább 2 motorja működik, azaz legfeljebb 1 hibásodik meg. Legyen X a hárommotoros gépben repülés közben meghibásodó motorok száma.

$$(1 \text{ pont}) X \sim B(3, 1 - p)$$

(ha ez nem szerepel, de jól számolja a valószínűséget, akkor nem kell levonni)

$$(3 \text{ pont}) \mathbb{P}(\text{a hárommotoros tud repülni}) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 0) = 3(1 - p)p^2 + p^3$$

Az ötmotoros gép akkor tud repülni, ha legalább 3 motorja működik, azaz legfeljebb 2 hibásodik meg. Legyen Y az ötmotoros gépben repülés közben meghibásodó motorok száma.

$$(1 \text{ pont}) Y \sim B(5, 1 - p)$$

(ha ez nem szerepel, de jól számolja a valószínűséget, akkor nem kell levonni)

(3 pont) $\mathbb{P}(\text{az ötmotoros tud repülni}) = \mathbb{P}(Y \leq 2) = \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 0) = 10(1-p)^2p^3 + 5(1-p)p^4 + p^5$

(2 pont) Az ötmotoros biztonságosabb, ha $10(1-p)^2p^3 + 5(1-p)p^4 + p^5 > 3(1-p)p^2 + p^3$

(1 pont) azaz, ha $10(1-p)^2p + 5(1-p)p^2 + p^3 > 3(1-p) + p$

(1 pont) átrendezve, ha $10(1-p)^2p + 5(1-p)p^2 + p^3 + 2p - 3 > 0$

(1 pont) átrendezve, ha $6p^3 - 15p^2 + 12p - 3 > 0$

(3 pont) a baloldal szorzattá alakítható: $3(p-1)^2(2p-1)$

(1 pont) az első tényező a négyzeten van, így nem lehet negatív, és 0 is csak akkor ha $p = 1$, tehát

(2 pont) a pozitivitás feltétele, hogy $2p - 1 > 0$ és $p < 1$

(1 pont) azaz a feltétel: $\frac{1}{2} < p < 1$