Wiederholung der Klausur

Allgemeine Regeln: Die Klausur dauert 90 Minuten. Die Benutzung eines (nicht graphischen) Taschenrechners ist erlaubt. Numerische Ergebnisse sollen auf 4 Dezimalstellen gerundet werden. Zum Erreichen der maximalen Punktzahl ist es notwendig, detaillierte Lösungen zu geben und die angewandten Behauptungen, Sätze und Eigenschaften aufzulisten. Es ist verboten, während der ersten 30 Minuten den Raum zu verlassen.

1. Seien A und B Ereignisse, für die $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{1}{2}$ gilt. Sei noch C ein solches Ereignis, für das die Ereignispaare A und C bzw. B und C unabhängig sind, und nehmen wir auch an, dass die drei Ereignisse gleichzeitig nicht auftreten können. Berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B und C, wenn wir wissen, dass $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{8}$ und $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \frac{19}{40}$ gelten.

2. In einer Kneipe sind die Bierflaschen in drei Kästen gestellt. Im ersten Kasten gibt es 12 Falschen Krombacher und 12 Flaschen Paulaner, im zweiten Kasten 16 Flaschen Krombacher und 8 Flaschen Paulaner, und im dritten Kasten 6 Flaschen Krombacher und 18 Flaschen Paulaner. Der Kretschmer läuft nicht gern überflüssig herum, also nimmt er eine zufällig gewählte Flasche aus dem nächstliegenden ersten Kasten mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, wenn jemand ein Bier bestellt. Er geht aber mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ zum zweiten Kasten, und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ sogar bis zum weitesten dritten Kasten, um eine zufällig gewählte Flasche auszunehmen.

   (a) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gast, der ein Bier bestellt, ein Paulaner bekommt?

   (b) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kretschmer die Flasche aus dem dritten Kasten wählte, wenn wir wissen, dass der Gast ein Paulaner bekam?

3. Wir wählen zwei Zahlen zufällig und unabhängig voneinander auf dem Intervall $(0; 3)$. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Quotient der ersten und zweiten Zahl zwischen $\frac{1}{3}$ und 3 liegt?

4. Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X ist durch die Formel

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 0, \\ \sqrt{\dfrac{t}{c}}, & \text{falls } 0 < t \leq c, \\ 1, & \text{falls } c < t \end{cases}$$

   gegeben, wo $c > 0$ eine positive reelle Zahl ist. Bestimmen wir den Wert von c, wenn wir wissen, dass $\mathbb{E}(X) = 1$ gilt.

5. In einem Gesellschaftsspiel würfelt der Spieler, der an der Reihe ist, und rückt entsprechend viele Felder mit seinem Figur vor, außer wenn eine Sechs gewürfelt wird. In diesem Fall würfelt der Spieler nämlich erneuert bis zum ersten Wurf, der nicht eine Sechs ist. Abschließend summiert er die Ergebnisse aller Würfe auf, und rückt dementsprechend vor. Bestimmen wir den Erwartungswert der Anzahl der Felder, die von einem Spieler in einem Rund vorgerückt werden.

6.* Nehmen wir an, dass die Motore eines Flugzeugs während des Fluges unabhängig voneinander einzeln mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ kaputtgehen. Für welche Werte von p wird ein Flugzeug mit 5 Motoren sicherer, als eines mit 3 Motoren, wenn ein Flugzeug beim Flug mindestens die Hälfte seiner Motore benötigt?

Verteilung	Notation	ran$X$	$\mathbb{P}(X = k)$ oder $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0, 1\}$	$1 - p,\ p$	-	p
Binomialverteilung	$\mathrm{Bin}(n; p)$	$\{0, 1, \ldots, n\}$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	-	np
Poisson-Verteilung	$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	-	λ
geometrische Verteilung	$\mathrm{Geo}(p)$	$\mathbb{N}^+$	$(1-p)^{k-1} p$	-	$\frac{1}{p}$
uniforme Verteilung	$\mathrm{U}(a; b)$	$(a; b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$
Exponentialverteilung	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0; \infty)$	$1 - e^{-\lambda t}\ (0 \leq t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$