

Klausur (Zárthelyi dolgozat)

Megoldás

Tanszéki általános alapelvek

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait, és az ezekhez rendelt részpontoszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontoszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek pusztán leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészben) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontoszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különböző megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mind-egyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot érő megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozathoz nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0). Az útmutatóban szereplő részpontoszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírtól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Aritmetikai hiba esetén elszámolásonként 1-1 pont vonandó le a feladatokból. Ez alól kivétel, ha az elszámolás lényegesen egyszerűsíti vagy módosítja a feladat felépítését. Ilyen esetekben azon feladatrészekért, amik az elszámolás okán fel sem merültek, nem jár pont.

1. Seien A , B und C Ereignisse, von denen mindestens eines immer eintritt. Nehmen wir noch an, dass A und B unabhängig, während B und C disjunkt sind. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeiten dieser drei Ereignisse, wenn auch $\mathbb{P}(A \cup C \mid B) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(C \mid A \cup C) = \frac{3}{4}$ und $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{12}$ gelten.

Megoldás:

(1 pont) A feltételes valószínűség definíciója szerint $\mathbb{P}(A \cup C \mid B) = \frac{\mathbb{P}((A \cup C) \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

(1 pont) $(A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B) = A \cap B$, mivel B és C diszjunktak.

(1 pont) A függetlenség miatt $\mathbb{P}(A \cup C \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)}$,

(1 pont) ezt egyszerűsítve $\frac{1}{4} = \mathbb{P}(A \cup C \mid B) = \mathbb{P}(A)$.

A második feltételes valószínűségből pedig

(2 pont)

$$\frac{3}{4} = \frac{\mathbb{P}((A \cup C) \cap C)}{\mathbb{P}(A \cup C)} = \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(A \cup C)},$$

(1 pont) tehát $\mathbb{P}(A \cup C) = \frac{4}{3}\mathbb{P}(C)$.

(1 pont) A szita-formulát alkalmazva

(2 pont) $\mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C)$,

(1 pont) azaz $\frac{4}{3}\mathbb{P}(C) = \frac{1}{4} + \mathbb{P}(C) - \frac{1}{12}$,

(1 pont) ahonnan $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$.

(1 pont) Mivel $A \cup B \cup C = \Omega$, így $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1$.

A szita-formulát alkalmazva

(2 pont)

$$1 = \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

(1 pont) A függetlenség miatt $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4} \mathbb{P}(B)$.

(2 pont) A B és C események egymást kizárók tehát $B \cap C = \emptyset$, tehát $\mathbb{P}(B \cap C) = 0$,

(1 pont) és $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$.

(1 pont) Mindezeket behelyettesítve $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{9}$.

2. Alex und Beate spielen ein Kartenspiel mit einem ungarischen Kartenpaket. Zuerst zieht Alex zwei Blätter aus dem gemischten Paket, und dann zieht Beate ein Blatt aus der Hand von Alex (ohne Kenntnis von den Werten oder von den Farben dieser zwei Blätter). Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Beate ein Herz zieht? Angenommen, dass Beate ein Herz gezogen hat, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das andere Blatt, das in der Hand von Alex geblieben ist, auch ein Herz ist? (In einem ungarischen Spielkartenpaket gibt es 32 Blätter, von denen genau 8 Blätter die Farbe "Herz" haben.)

Megoldás:

Tekintsük a következő eseményeket:

(1 pont) B =Beate piros lapot húzott, A_i =Alex i darab pirosat húzott, $i = 0, 1, 2$

A kért valószínűség $\mathbb{P}(B)$.

(1 pont) Mivel A_1 , A_2 és A_3 teljes eseményrendszer alkotnak,

(1 pont) így a teljes valószínűség tételéből

(2 pont) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A_0) \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B|A_1) \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B|A_2) \mathbb{P}(A_2)$

(1-1-1 pont) $\mathbb{P}(B|A_0) = 0$, $\mathbb{P}(B|A_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B|A_2) = 1$,

(2-2 pont) $\mathbb{P}(A_1) = \frac{24 \cdot 8}{\binom{32}{2}} = \frac{12}{31}$, $\mathbb{P}(A_2) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{7}{124}$

(Nincs szükségünk $\mathbb{P}(A_0) = \frac{\binom{24}{2}}{\binom{32}{2}}$ kiszámolására, ezért külön pont nem jár érte, de ha valamiért csak ez szerepel és a másik kettő nem, akkor lehet rá pontot adni.)

(1 pont) Behelyettesítve: $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{31} + 1 \cdot \frac{7}{124}$,

(1 pont) $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$.

(1 pont) A másik kért valószínűség $\mathbb{P}(A_2|B)$.

(1 pont) A Bayes-tételből

(2 pont) $\mathbb{P}(A_2|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_2) \mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(B)}$

(2 pont) behelyettesítve: $\mathbb{P}(A_2|B) = \frac{1 \cdot \frac{7}{124}}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{31}$

3. Alex möchte Beate eine Folge von n Bits senden. Sie wissen, dass der Kanal, durch den sie kommunizieren, unsicher ist. Nämlich, ein Bit, das durch den Kanal übertragen wird, kommt in 1% der Fälle falsch zum Empfänger an. Das heißt, wenn ein Bit 0 (bzw. 1) gesendet wird, dann bekommt der Empfänger das Bit 1 (bzw. 0) mit Wahrscheinlichkeit 1%. Sie behandeln dieses Problem folgenderweise: Alex sendet jedes Bit dreimal nacheinander, und geht dann mit dem nächsten Bit in der gleicher Weise weiter (also sendet er schließlich eine Folge von $3n$ Bits). Ein Block von 3 Bits, der zu einem einzigen Bit der ursprünglichen Nachricht gehört, wird dann von Beate so dekodiert, dass sie den mehrmals aufgetretenen Wert des Blocks akzeptiert (zum Beispiel: wenn sie den Block 101 betrachtet, dann nimmt sie den Wert 1). Wie lang kann die originelle Nachricht sein (d.h.: wie groß kann die Zahl n höchstens gewählt werden), wenn Alex die Nachricht mindestens mit Wahrscheinlichkeit 99% fehlerfrei senden möchte?

Megoldás:

(2 pont) Egy hármashból meghibásodó bitek száma $\sim B(3, 0.01)$

(2 pont) Egy adott bitet Beate akkor dekódol jól, ha az átküldött hármashból legfeljebb egy hibásodik meg.

Jelölje ennek valószínűségét p_{hb} (helyes bit valószínűség)

(2 pont) $p_{hb} = 0.99^3 + 3 \cdot 0.01 \cdot 0.99^2$

(2 pont) $p_{hb} = 0,999702$

(1 pont) Beate helyesen dekódolja az üzenetet, ha minden bitjét jól dekódolja

(2 pont) ennek valószínűsége $(p_{hb})^n = (0,999702)^n$

(1 pont) mert függetlenül hibásodnak meg.

(2 pont) Azt szeretnénk tehát, hogy $(0,999702)^n \geq 0,99$ teljesüljön.

(2 pont) Logaritmusát véve a két oldalnak $n \cdot \ln 0,999702 \geq \ln 0,99$,

(2 pont) ahonnan $n \leq \frac{\ln 0,99}{\ln 0,999702} \approx 33,7209$,

(2 pont) tehát az üzenet hossza legfeljebb 33 lehet.

4. Wir wählen zwei reelle Zahlen zufällig und unabhängig voneinander, eine auf dem Intervall $[0; 2]$, und die andere auf dem Intervall $[0; 4]$. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe dieser Zahlen im Intervall $[3; 5]$ liegt?

Megoldás:

(2 pont) A véletlen kísérlet megegyezik egy pont választásával a $[0, 2] \times [0, 4]$ téglalapon.

(2 pont) Ez az Ω eseménytér.

(4 pont) A kedvező terület ezen téglalapnak az $x + y = 3$ és az $x + y = 5$ egyenes közé eső része.

(4 pont) Geometriai valószínűségi mező esetén a valószínűség = $\frac{T_{kedvezo}}{T_{\Omega}}$

(2 pont) $T_{\Omega} = 2 \cdot 4 = 8$

(4 pont) $T_{kedvezo} = \frac{7}{2}$ (tetszőleges módon kiszámolva)

(2 pont) A kért valószínűség tehát $\frac{7}{16}$

5. Betrachten wir die Funktion f , die durch die Formel

$$f(t) = \begin{cases} \frac{(t-1)^2}{9}, & \text{falls } t \in (1; c), \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

angegeben ist, wo $c > 1$ ein reeller Parameter ist.

(a) Bestimmen wir den Wert von c , wenn wir wissen, dass f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen ist.

(b) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion f . Was ist der Erwartungswert von X ?

Megoldás:

(a)

(1 pont) f nemnegatív

(2 pont) az előadáson tanult tétel szerint pontosan akkor sűrűségfüggvény, ha $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

(2 pont) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_1^c \frac{(x-1)^2}{9} dx$

(2 pont) $= \frac{1}{9} \left[\frac{(x-1)^3}{3} \right]_1^c = \frac{(c-1)^3}{27}$

(2 pont) Azaz $(c-1)^3 = 27$, tehát $c-1 = 3$,

(1 pont) ebből pedig $c = 4$.

(b)

(2 pont) $\mathbb{E} X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$

(2 pont) $\mathbb{E} X = \int_1^4 x \frac{(x-1)^2}{9} dx$

(2 pont) $= \int_1^4 (x-1) \frac{(x-1)^2}{9} dx + \int_1^4 \frac{(x-1)^2}{9} dx$ (akkor is nyilván jár pont, ha a számolásnak nem ezt az útját választja)

(2 pont) $= \frac{1}{9} \left[\frac{(x-1)^4}{4} \right]_1^4 + 1$

(2 pont) $= \frac{13}{4}$

- 6.* Sei X eine uniformverteilte Zufallsvariable auf dem Intervall $[0; 2]$, und sei noch $Y = \frac{1}{(1+X)^2}$.

(a) Geben wir die Dichtefunktion und den Erwartungswert von Y .

(b) Vergleichen wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}\left(Y < \frac{1}{(1+\mathbb{E} X)^2}\right)$ und $\mathbb{P}(Y < \mathbb{E} Y)$.

Megoldás:

(a)

(1 pont) X eloszlásfüggvénye:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \leq 0, \\ \frac{t}{2}, & \text{ha } 0 < t \leq 2, \\ 1, & \text{ha } t > 2. \end{cases}$$

(1 pont) Y eloszlásfüggvénye: $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y < t) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{(1+X)^2} < t\right)$

(1-1 pont) $= \mathbb{P}\left(\frac{1}{1+X} < \sqrt{t}\right)$ (hiszen $1+X$ nemnegatív)

(1 pont) $= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 1 < X'\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - 1\right)$

(1 pont) $= 1 - \frac{\frac{1}{\sqrt{t}} - 1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{t}}$

(1 pont) ha $0 < \frac{1}{\sqrt{t}} - 1 \leq 2$, azaz ha $\frac{1}{9} \leq t < 1$,

(1 pont) továbbá 0, ha $t < \frac{1}{9}$, illetve 1, ha $t \geq 1$.

(1 pont) Y sűrűségfüggvénye deriválással adódik: $f_Y(t) = \frac{1}{4t^{3/2}}$

(1 pont) ha $t \in \left(\frac{1}{9}; 1\right)$, különben 0.

(3 pont)

$$\mathbb{E} Y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{\frac{1}{9}}^1 y \frac{1}{4y^{3/2}} dy = \int_{\frac{1}{9}}^1 \frac{1}{4y^{1/2}} dy = \frac{1}{4} \left[2y^{1/2} \right]_{\frac{1}{9}}^1 = \frac{1}{3}$$

(a transzformáltra vonatkozó várható értékkel is kiszámolható)

(ebben a feladatban a várható érték definíciójáért önmagában nem jár pont)

(b)

(1 pont) $\mathbb{E} X = 1$

(2 pont) az első valószínűség tehát $F_Y\left(\frac{1}{4}\right)$

(1 pont) a második valószínűség $F_Y\left(\frac{1}{3}\right)$

(2 pont) az $F_Y(t)$ eloszlásfüggvény esetünkben szigorúan monoton növekvő az $\left[\frac{1}{9}; 1\right]$ intervallumon,

(1 pont) ezért a $\mathbb{P}(Y < \mathbb{E} Y)$ valószínűség nagyobb.