Klausur

Allgemeine Regeln: Die Klausur dauert 90 Minuten. Die Benutzung eines (nicht graphischen) Taschenrechners ist erlaubt. Numerische Ergebnisse sollen auf 4 Dezimalstellen gerundet werden. Zum Erreichen der maximalen Punktzahl ist es notwendig, detaillierte Lösungen zu geben und die angewandten Behauptungen, Sätze und Eigenschaften aufzulisten. Es ist verboten, während der ersten 30 Minuten den Raum zu verlassen.

1. Seien A, B und C Ereignisse, von denen mindestens eines immer eintritt. Nehmen wir noch an, dass A und B unabhängig, während B und C disjunkt sind. Bestimmen wir die Wahrscheinlichkeiten dieser drei Ereignisse, wenn auch $\mathbb{P}(A \cup C \mid B) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(C \mid A \cup C) = \frac{3}{4}$ und $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{12}$ gelten.

2. Alex und Beate spielen ein Kartenspiel mit einem ungarischen Kartenpaket. Zuerst zieht Alex zwei Blätter aus dem gemischten Paket, und dann zieht Beate ein Blatt aus der Hand von Alex (ohne Kenntnis von den Werten oder von den Farben dieser zwei Blätter). Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Beate ein Herz zieht? Angenommen, das Beate ein Herz gezogen hat, was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das andere Blatt, das in der Hand von Alex geblieben ist, auch ein Herz ist? (In einem ungarischen Spielkartenpaket gibt es 32 Blätter, von denen genau 8 Blätter die Farbe "Herz" haben.)

3. Alex möchte Beate eine Folge von n Bits senden. Sie wissen, dass der Kanal, durch den sie kommunizieren, unsicher ist. Nämlich, ein Bit, das durch den Kanal übertragen wird, kommt in 1% der Fälle falsch zum Empfänger an. Das heißt, wenn ein Bit 0 (bzw. 1) gesendet wird, dann bekommt der Empfänger das Bit 1 (bzw. 0) mit Wahrscheinlichkeit 1%. Sie behandeln dieses Problem folgenderweise: Alex sendet jedes Bit dreimal nacheinander, und geht dann mit dem nächsten Bit in der gleicher Weise weiter (also sendet er schließlich eine Folge von $3n$ Bits). Ein Block von 3 Bits, der zu einem einzigen Bit der ursprüglichen Nachricht gehört, wird dann von Beate so dekodiert, dass sie den mehrmals aufgetretenen Wert des Blocks akzeptiert (zum Beispiel: wenn sie den Block 101 betrachtet, dann nimmt sie den Wert 1). Wie lang kann die originelle Nachricht sein (d.h.: wie groß kann die Zahl n höchstens gewählt werden), wenn Alex die Nachricht mindestens mit Wahrscheinlichkeit 99% fehlerfrei senden möchte?

4. Wir wählen zwei reelle Zahlen zufällig und unabhängig voneinander, eine auf dem Intervall $[0;2]$, und die andere auf dem Intervall $[0;4]$. Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe dieser Zahlen im Intervall $[3;5]$ liegt?

5. Betrachten wir die Funktion f, die durch die Formel

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{(t-1)^2}{9}, & \text{falls } t \in (1;c), \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$$

angegeben ist, wo $c > 1$ ein reeller Parameter ist.
(a) Bestimmen wir den Wert von c, wenn wir wissen, dass f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen ist.
(b) Sei X eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion f. Was ist der Erwartungswert von X?

6.* Sei X eine uniformverteilte Zufallsvariable auf dem Intervall $[0;2]$, und sei noch $Y = \frac{1}{(1+X)^2}$.
(a) Geben wir die Dichtefunktion und den Erwartungswert von Y.
(b) Vergleichen wir die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}\left(Y < \frac{1}{(1+\mathbb{E}\,X)^2}\right)$ und $\mathbb{P}\left(Y < \mathbb{E}\,Y\right)$.

Verteilung	Notation	ran$X$	$\mathbb{P}(X=k)$ oder $F_X(t)$	$f_X(t)$	$\mathbb{E}(X)$
Indikatorvariable	$\mathbb{1}(p)$	$\{0,1\}$	$1-p,\ p$	-	p
Binomialverteilung	$\mathrm{Bin}(n;p)$	$\{0,1,\ldots,n\}$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	-	np
Poisson-Verteilung	$\mathrm{Poi}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	-	λ
geometrische Verteilung	$\mathrm{Geo}(p)$	$\mathbb{N}^+$	$(1-p)^{k-1}p$	-	$\frac{1}{p}$
uniforme Verteilung	$\mathrm{U}(a;b)$	$(a;b)$	$\frac{t-a}{b-a}$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$
Exponentialverteilung	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$[0;\infty)$	$1-e^{-\lambda t}\ (0\le t)$	$\lambda e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{\lambda}$