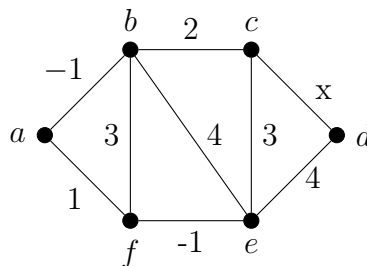


Algoritmusok és gráfok - 1. vizsga
2024. december 17.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. (a) A tanult beszűrési eljárást használva építsen bináris keresőfát az alábbi sorrendben érkező számokból: 13, 10, 20, 12, 14, 5, 15, 21, 9, 11. Elég a fa végső állapotát megadni, és itt kivételesen nem kell indokolni sem.
(b) Magyarázza el, hogy a beszűrások végén kapott fa miért AVL-fa.
(c) Törölje ki a fenti beszűrások után kapott fa gyökerét, rajzolja le a törlés után kapott fát. (Indokolni itt sem kell.)

2. Az alábbi gráfon futtatjuk Kruskal algoritmusát, az algoritmus az ab, cd, ef, af, bc éleket választja be ebben a sorrendben a minimális feszítőfába.



Adja meg az összes lehetséges x értéket, amellyel ez előfordulhat. Indoklásképpen írja le röviden, hogyan működik a Kruskal algoritmus és hogy ebből hogyan következik az x értékére adott válasza.

3. Dijkstra algoritmusát használjuk az A, B, C, D, E csúcsokból álló **irányított**, élsúlyozott G gráfban, eközben az *eddigilegjobb* tömb így változik (az egyes sorok az *eddigilegjobb* tömb változását mutatják egy-egy csúcs KÉSZ halmazba kerülése után).

A	B	C	D	E
∞	3	*	∞	5
∞	*	*	9	4
6	*	*	9	*
*	*	*	7	*
*	*	*	*	*

- (a) Lehetséges-e, hogy van a gráfban él B -ből E -be? Biztos-e, hogy ez az él létezik? Ha ez az él lehetséges, akkor adja meg azt is, hogy mi lehet ezen él súlya.
(b) Lehetséges-e, hogy van a gráfban él E -ből D -be? Biztos-e, hogy ez az él létezik? Ha ez az él lehetséges, akkor adja meg azt is, hogy mi lehet ezen él súlya.

Válaszait ne felejtse el indokolni!

4. Adott egy n elemű tömb, melyben (nem feltétlenül különböző) egész számokat tárolunk. Adjon $O(n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy igaz-e, hogy a tömbben bármely két elem különbsége legfeljebb 100.
5. Egy hat pontú **irányított** G gráf csúcsait egy mélységi bejárás A, C, D, B, E, F sorrendben járja be, a befejezési számok pedig ezek: A: 6; B: 2; C: 3; D: 1; E: 4; F: 5.
(a) Rajzolja fel az ezen futáshoz tartozó DFS fát és röviden indokolja meg, hogy miért így néz ki a fa.
(b) A B csúcsból melyik másik csúcsokba vezethet él a G gráfban, ha tudjuk, hogy a G gráf DAG?

6. Szomszédossági mátrixával (ennek neve legyen A) adott egy n csúcsú **irányítatlan** G gráf, mely egy ország úthálózatát írja le. A gráf csúcsai a városok, az élek a városok között menő közvetlen utak, élsúlyok nincsenek. Adott továbbá egy másik n -szer n -es M mátrix is, aminek $M[i, j]$ értéke azt adja meg hogy veszélyes-e az i és j városok közötti közvetlen út vagy sem: $M[i, j]$ értéke végtelen, ha nincsen közvetlen út i és j között, $M[i, j]$ értéke 1, ha van közvetlen út és az biztonságos és $M[i, j]$ értéke 2, ha van közvetlen út, de az nem biztonságos.

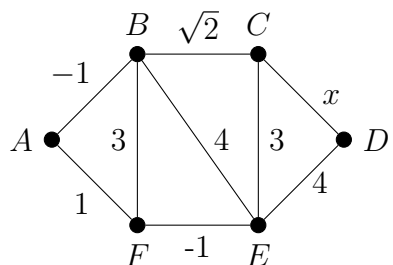
Adott két kijelöl város, S és T , és azt szeretnénk eldönteni, hogy el lehet-e egyikből a másikba úgy jutni, hogy közben végig biztonságos utakon haladunk csak át. Melyik tanult algoritmust lehet használni, hogyan és miért, hogy $O(n^2)$ lépésben megválaszoljuk ezt a kérdést?

Algoritmusok és gráfok - 2. vizsga
2025. január 7.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Előállhat-e egy bináris keresőfa preorder bejárása során a 7, 5, 12, 6, 20, 15, 21 sorrend? Ha igen, akkor adjon meg egy olyan bináris keresőfát, ahol ez előfordulhat, ha pedig úgy véli, hogy ez nem lehetséges, akkor indokolja meg ezt.

2. Az alábbi gráfon futtatjuk Prim algoritmusát az A csúcsból minimális feszítőfa megkeresésére. Az x élsúly értékétől függően (x nem feltétlenül egész szám!) mely élek kerülnek be a feszítőfába? Az élek bekerülési sorrendjét is adja meg és ne feledje megoldását indokolni.



3. Egy hat csúcsú **irányítatlan** G gráfon futtatva a BFS-t (azaz a szélességi bejárást) az A csúcsból, a csúcsokat A, C, E, F, B, D sorrendben látogatjuk meg és a HONNAN tömb így néz ki a futás végén:

A	B	C	D	E	F
A	E	A	E	A	A

- (a) Rajzolja fel az ehhez a futáshoz tartozó BFS-fát. (Itt indokolni nem kell.)
(b) Magyarázza el, hogy miért nincs olyan futása a DFS-nek (mélységi bejárásnak) ugyanezen gráfon, ahol a HONNAN tömb így néz ki a futás végén:

A	B	C	D	E	F
A	D	A	C	B	E

4. Egy hat csúcsú **irányított** gráfról tudjuk, hogy benne az A, C, B, E, D, F sorrend topologikus sorrend.

(a) Lehetséges-e, hogy ennek a gráfnak 4 éle van?

(b) Legfeljebb hány éle lehet ennek a gráfnak?

Ne feledkezzen meg az indoklásról!

5. Adott egy n elemű tömb, melyben **különböző egész** számokat tárolunk. Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy van-e két olyan szám a tömbben, melyek különbsége 5-nél nagyobb, de 10-nél kisebb.

6. Szomszédossági mátrixával adott egy város úthálózatának élsúlyozott, **irányítatlan** gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi idő alatt lehet megtenni az adott útszakaszt. Adott a gráfban egy kijelölt (X, Y) él és két kijelölt csúcs, A és B , és szeretnénk a legrövidebb idő alatt eljutni A -ból B -be úgy, hogy közben pontosan egyszer haladunk át a kijelölt (X, Y) élen (az mindegy, hogy X -ből megyünk Y -ba vagy fordítva).

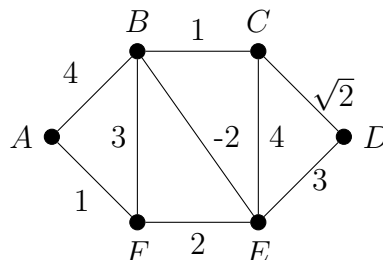
Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk találni a leggyorsabb ilyen eljutás idejét? (Itt n szokásos módon a gráf csúcsainak számát jelöli.)

Algoritmusok és gráfok - 3. vizsga
2025. január 14.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Előfordulhat-e egy bináris keresőfában az, hogy a 16-os érték (sikertelen) keresésekor a 7, 13, 18, 11, 15 értékeket látjuk ebben a sorrendben? Ha igen, akkor adjon meg egy olyan bináris keresőfát, ahol ez előfordulhat (és magyarázza el, hogy ez a fa miért jó), ha pedig úgy véli, hogy ez nem lehetséges, akkor indokolja meg ezt.

2. Melyik csúcsból futtathattuk az alábbi gráfban Prim algoritmusát minimális feszítőfa keresésére, ha tudjuk, hogy az algoritmus által beválasztott második él a BE él? (Elég egy ilyen csúcsot megtalálni.) Mely élek, milyen sorrendben kerülnek be ezután a feszítőfába és miért?



3. Adott egy $n \geq 4$ csúcsú AVL-fa, melyben különböző egész számokat tárolunk. Adjon $O(\log n)$ lépésszámú eljárást a fában tárolt második legkisebb érték megkeresésére.
4. Tekintsük az alábbi éllistával adott irányított gráfot:

$a : b, g; \quad b : g, f; \quad c : d; \quad d : -; \quad e : d; \quad f : e, c, d; \quad g : e, f;$

- (a) Futassa ezen a gráfon a mélységi bejárást (DFS), határozza meg a befejezési számokat és rajzolja fel a DFS-fát. (Itt nem kell indokolni semmit.)
- (b) Az (a) pontban kapott DFS futás segítségével vagy lássa be, hogy ez a gráf nem DAG vagy adjon meg ezen módszer segítségével egy topologikus sorrendet ebben a gráfban.
5. Adott egy n elemű tömb, melyben különböző egész számokat tárolunk. Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy igaz-e, hogy a tömb minden elemének az ellentettje, azaz a (-1) -szerese is benne van a tömbben.
6. Szomszédossági mátrixával adott egy **irányított**, élsúlyozott G gráf, melyben minden élsúly pozitív. A gráfban minden csúcsnak van színe, piros vagy zöld, ez az információ egy, a csúcsokkal indexelt tömbben adott. Adott továbbá a gráfban két kijelölt csúcs, S és T , és keressük a legrövidebb olyan út hosszát S -ből T -be, melyre igaz, hogy az úton piros csúcs után közvetlenül mindig zöld következik, amennyiben még nincsen vége az útnak (de zöld csúcs után jöhet zöld is és piros is, ha még nincsen vége az útnak).
- Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk oldani ezt a feladatot?

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Az alábbi (ismeretlen értékeket is tartalmazó) szomszédossági mátrix egy hat csúcsú **irányított** gráfot ír le.

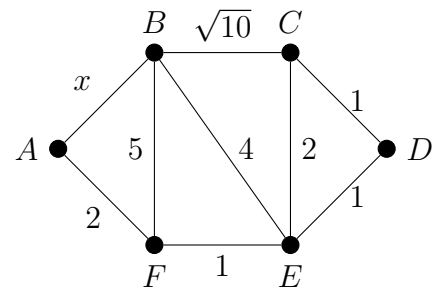
Adja meg x és y összes lehetséges értékét, ha tudjuk, hogy a gráf DAG.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	x	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	y	0	0
6	0	0	0	0	0	0

2. Előállhat-e egy bináris keresőfa preorder bejárása során a 8, 1, 3, 21, 12, 10, 18 sorrend? Ha igen, akkor adjon meg egy olyan bináris keresőfát, ahol ez előfordulhat (és magyarázza el, hogy miért jó ez a fa), ha pedig úgy véli, hogy ez nem lehetséges, akkor indokolja meg ezt.

3. (a) Tegyük fel, hogy az alábbi gráfban a minimális feszítőfa súlya 8. Lehetséges-e, hogy $x = \sqrt{2}$?

(b) Tegyük fel, hogy $x = 3$. Mely éleket és milyen sorrendben választja be a minimális feszítőfába a Kruskal algoritmus? Indoklásképpen írja le, hogy hogyan működik az algoritmus.



4. Dijkstra algoritmusát használjuk az A, B, C, D, E csúcsokból álló **irányított**, élsúlyozott G gráfban az A kezdőcsúcsból, eközben az *eddigilegjobb* tömb így változik (az egyes sorok az *eddigilegjobb* tömb változását mutatják egy-egy csúcs KÉSZ hal-mazba kerülése után).

	A	B	C	D	E
*	*	1	∞	5	∞
*	*	*	5	2	∞
*	*	*	4	*	∞
*	*	*	*	*	7
*	*	*	*	*	*

Adja meg a *honnán* tömb értékét az egyes lépések után (egy ugyanilyen méretű táblázat formájában) és indokolja is meg a választát.

5. Adott egy n elemű tömb, melyben különböző egész számokat tárolunk. Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy van-e két olyan szám a tömbben, melyek átlaga 2025.
6. Szomszédossági mátrixával adott egy **irányított** G gráf. A gráfban minden csúcsnak van színe, piros vagy zöld, ez az információ egy, a csúcsokkal indexelt tömbben adott. Adott továbbá a gráfban egy kijelölt zöld csúcs, S , és szeretnénk megkeresni az összes piros csúcsot a gráfban, ahova vezet S -ből csupa zöld út (azaz olyan út, amin az utolsó kivételével minden csúcs zöld).

Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk oldani ezt a feladatot?