

Algoritmusok és gráfok - Zárthelyi
2023. november 23.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Az alábbiakban három különböző algoritmus lépésszámát látjuk, ezek közül pontosan egyikre igaz, hogy $O(n)$ -es.

$$2023^{2024} \cdot 2^n + 4n$$

$$17\sqrt{n} + \frac{1}{n} + 210$$

$$9n \cdot \frac{\log_2 n}{15} - 256$$

Válassza ki, hogy melyik ez a lépésszám és lássa is be megfelelő c konstans és n_0 küszöb megadásával, hogy ez a lépésszám $O(n)$ -es.

2. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9 tömböt kétszer rendezzük, egyszer összefésüléses rendezéssel, egyszer pedig beszűrásos rendezéssel. Hány összehasonlítás történik az egyik és a másik esetben a rendezések teljes futása alatt?
3. Egy bináris keresőfában a 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12 számokat tároljuk. A fa preorder bejárása így kezdődik: 8, 4, 2, 3, 7, 5, 12, de azt nem tudjuk, hogy a maradék két értéket ezután milyen sorrendben járjuk be.
- (a) Adja meg az összes lehetséges bináris keresőfát, ahol ez előfordulhat.
- (b) Mindegyik fáról döntse el, hogy AVL-fa-e.
4. Egy 11 méretű hash táblába 7 kulcsot szúrtunk be valamilyen sorrendben nyílt címzéssel, lineáris próbával (a lineáris próba lefele indul), a használt hash függvény a $h(K) = K$ maradéka 11-gyel osztva függvény volt. Ezután egy értéket kitöröltünk, ennek helyét $\star$ jelzi, így az alábbi táblát kaptuk.
- (a) Melyik cella lehetett az első, ahova beszúrtunk? Az összes lehetséges ilyen cellát adja meg.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	25	3	14					9	$\star$	2

- (b) Hogyan zajlik a 13-as kulcs beszúrása a fenti táblába?
5. Egy páratlan sok egész számból álló halmaz mediánja a halmaz elemei közül az az érték, amire igaz, hogy a halmazban pontosan ugyanannyi nála kisebb, mint nála nagyobb szám van. (Például az $\{1, 5, 10, 2, 4, 7, 33\}$ halmaz mediánja az 5, mert három darab 5-nél kisebb és három darab 5-nél nagyobb szám szerepel a halmazban.)

Adott egy páratlan elemszámú tömb, melyben n darab csupa különböző egész számot tárolunk és adott egy bináris keresőfa, melyben szintén n elem van (de nem feltétlenül ugyanazok, amik a tömbben is szerepelnek). Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy a tömbben tárolt számok mediánja benne van-e a bináris keresőfában.

6. Egy szomszédossági mátrixával adott $n \geq 2023$ csúcsú G gráf csúcshalmaza $\{1, 2, \dots, n\}$. A gráfban az 1-es csúcs pirosra van színezve, a többi csúcs színtelen. Olyan $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust szeretnénk készíteni, ami eldönti, hogy ki lehet-e színezni a gráf egy másik csúcsát kékre úgy, hogy minden színtelenül maradt csúcsnak legyen legalább egy színes szomszédja.

Először vázolja egy ilyen algoritmus működését pár mondatban szövegesen, majd adjon meg egy pszeudokódot is erre a feladatra (és persze most se feledkezzen el a helyesség és a lépésszám belátásáról).

Algoritmusok és gráfok - Pótzárthelyi
2023. december 4.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Az alábbi pszeudokód inputja egy $n > 2$ méretű $A[0 : n - 1]$ tömb, melyben egész számokat tárolunk. A pszeudokódban egy lépésnek az értékadás és az összeadás számít.

```
ciklus i=0-tól (n-1)-ig:
    számláló := -17
    ciklus amíg számláló < 2023
        A[i] := A[i] + A[i]
        számláló := számláló + 2
    ciklus vége
ciklus vége
```

- (a) Igaz-e, hogy ennek a kódnak a lépésszáma $O(n)$?
- (b) Igaz-e, hogy ennek a kódnak a lépésszáma $O(n^2)$?
2. A $2k, 2k - 1, 2k - 2, \dots, 3, 2, 1$ ($2k$ hosszú) csökkenően rendezett tömböt két különböző rendező algoritmussal is átrendezzük növekvőre: buborékrendezést és kiválasztásos rendezést használunk. Melyik esetben történik a kevesebb **csere**?
3. Egy bináris keresőfában a 2, 4, 5, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 20 számokat tároljuk és a 9-es kulcs (sikertelen) keresésekor az 5, 15, 8, 12, 10 értékeket látjuk ebben a sorrendben. Rajzolja fel az összes olyan bináris keresőfát, ahol ez lehetséges.
4. (a) Egy irányítatlan, hat csúcsú (ismeretlen) G gráfról csak annyit tudunk, hogy ha benne a szélességi bejárást (BFS) az A csúcsból futtatjuk, akkor a csúcsokat A, B, C, D, E, F sorrendben látogatjuk meg és a BFS fába az AB, BC, BD, DE, DF élek kerülnek be.
Mutassa meg, hogy ebben a G gráfban biztosan nincsen él C és F között.
- (b) Mutassa meg, hogy van olyan irányítatlan, hat csúcsú gráf amiben a szélességi bejárást (BFS) az A csúcsból futtatva a csúcsokat A, B, C, D, E, F sorrendben látogatjuk meg és a BFS fába az AB, BC, BD, DE, DF élek kerülnek be, de ha ugyanebben a gráfban a C csúcsból indul a BFS, akkor nem ugyanezt a feszítőfát kapjuk.
5. Adott egy $n \geq 2023$ méretű tömb, melyben egész számokat tárolunk. Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy igaz-e, hogy a tömbben minden érték pontosan kétszer szerepel.
6. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti egy szomszédossági mátrixával adott $n \geq 2023$ csúcsú **irányított** G gráfról, hogy igaz-e, hogy a gráfban a be-fokok mind különbözők.
Először vázolja egy ilyen algoritmus működését pár mondatban szövegesen, majd adjon meg egy pszeudokódot is erre a feladatra (és persze ennél a feladatnál se feledkezzen el a helyesség és a lépésszám belátásáról).