

Algoritmusok és gráfok - 1. vizsga
2023. december 19.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Egy irányított, élsúlyozott G gráfban a csúcsok d, a, e, c, b, f sorrendje topologikus sorrend. Ezen topologikus sorrenddel alkalmazzuk a DAG-ban használható tanult eljárást az a csúcsból induló legrövidebb utak meghatározására.
 - (a) Mennyi $távolság[d]$ és $távolság[a]$ értéke és miért?
 - (b) A d, a, e, c, f csúcsok közül melyekből vezethet 3 súlyú él b -be és melyekből biztos, hogy nem vezet ilyen súlyú él, ha az algoritmus az e, c, d csúcsokra az alábbi távolságokat számolta ki (az f csúcs távolságát nem tudjuk): $távolság[e] = -5$, $távolság[c] = 7$, $távolság[b] = 9$?
2. Tekintsük a 3, 10, 8, x , 5, 12 tömböt, ahol x egy máshol elő nem forduló pozitív egész számot jelöl.
 - (a) Van-e olyan lehetséges értéke x -nek, amikor a fenti tömböt beszűrásos rendezéssel rendezve pontosan 4 csere történik? Ha van, akkor elég egy ilyen x -et megadni (persze indoklással), nem kell az összeset megkeresni. Ha pedig nincs ilyen x , akkor ezt kell megindokolni.
 - (b) Van-e olyan lehetséges értéke x -nek, amikor a fenti tömböt kiválasztásos rendezéssel rendezve pontosan 4 csere történik? Ha van, akkor elég egy ilyen x -et megadni (indoklással), nem kell az összeset megkeresni. Ha pedig nincs ilyen x , akkor ezt kell megindokolni.
3. Egy 7 méretű hash táblába 7 kulcsot szűrtünk be nyílt címmel, lineáris próbával, a használt hash függvény a $h(K) = K$ maradéka 7-tel osztva függvény volt és az alábbi táblát kaptuk. (A lineáris próba lefele indul.) Törlés nem történt.
 - (a) A tömb minden eleméről döntse el, hogy lehetett-e ez az elsőnek beszűrt szám és ahol lehetett, ott adjon is meg egy megfelelő sorrendet.
 - (b) A tömb minden eleméről döntse el, hogy lehetett-e ez az utolsónak beszűrt szám és ahol lehetett, ott adjon is meg egy megfelelő sorrendet.

0	1	2	3	4	5	6
12	9	3	10	5	19	1

4. Egy hat csúcsú **irányított** G gráf csúcsait egy mélységi bejárás a, e, b, c, d, f sorrendben járja be, a befejezési számok pedig ezek: a : 6; b : 1; c : 3; d : 2; e : 4; f : 5.
 - (a) Rajzolja fel a bejáráshoz tartozó feszítőfát (azaz a felfedező élek fáját). Ezt most kivételesen nem kell indokolni.
 - (b) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él d -ből e -be? Itt már kell indoklás is!
 - (c) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él d -ből f -be? Itt már kell indoklás is!
5. A $T[0 : n - 1]$ **rendezett** tömbben a $0, 1, 2, \dots, n - 2$ értékek fordulnak elő úgy, hogy az egyik érték kétszer szerepel, a többi pedig pontosan egyszer. Adjon $O(\log n)$ lépésszámú eljárást a duplán előforduló szám megkeresésére. (Nem kell pszeudokód, elég egy **pontos**, szöveges leírás.)
6. Szomszédossági mátrixával adott egy város úthálózatának élsúlyozott, irányítatlan gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig a az adott útvonal hosszát adja meg méterben. A városban 5 postahivatal van, ahol levelet lehet feladni, ezek mindegyike egy-egy csomópontban van. Az A csomópontban levő lakásunkból szeretnénk a B csomópontban levő egyetemig eljutni rollerrel úgy, hogy közben beugrunk valamelyik postára feladni egy levelet és a lehető legkevesebbet akarunk rollerezni (végig rollerrel megyünk).

Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk határozni, hogy merre menjünk (vagyis nem csak az út hossza kell, hanem maga az útvonal is)? (A szokásos módon n a csomópontok számát jelöli.)

Algoritmusok és gráfok - 2. vizsga
2024. január 9.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Az alábbi szomszédossági mátrix egy hat csúcsú, nem élsúlyozott **irányított** gráfot ír le. Van-e olyan lehetséges értéke x -nek, amikor ebben a gráfban a csúcsok 6, 5, 3, 1, 2, 4 sorrendje topologikus sorrend? Ha nincs, akkor indokolja meg ezt, ha pedig lehetséges, akkor adja meg az összes olyan értékét x -nek, amikor a 6, 5, 3, 1, 2, 4 sorrend topologikus sorrend.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	x	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

2. Az alábbi szomszédossági lista által adott irányítatlan gráfban, ahol az y élsúly nem ismert, futtatjuk az a csúcsból a Prim algoritmust és azt tapasztaljuk, hogy az ac , ce , ed , cf , bc élek kerülnek be a minimális feszítőfába, ebben a sorrendben. Bizonyítsa be, hogy y értéke csak 2 lehet.

$a : b(3), c(1);$
 $b : a(3), c(y), d(2), e(3);$
 $c : a(1), b(y), e(1.5), f(2);$
 $d : b(2), e(1.3);$
 $e : b(3), c(1.5), d(1.3), f(3);$
 $f : c(2), e(3)$

3. A 9, 7, 12, 20, 6, 1, z , 5 tömböt rendezzük összefésüléses rendezéssel. Adjon meg egy olyan, a tömbben máshol elő nem forduló z értéket, amikor a rendezés során pontosan 16 összehasonlítás történik (és persze indokolja is, hogy ez a z miért jó.)
4. Egy hat csúcsú **irányítatlan** G gráf csúcsot szélességi bejárással (BFS) járunk be az A csúcsból és eközben a feszítőfába az AD, AE, DB, DC, EF élek kerülnek be ebben a sorrendben.
(a) Lássá be, hogy nem lehetséges az, hogy ebben a G gráfban a mélységi bejárást (DFS) az A csúcsból futtatva ugyanezek az élek ugyanebben a sorrendben kerüljenek be a feszítőfába.
(b) Adjon példát egy olyan G gráfra, amiben van olyan A csúcsból indított szélességi bejárás (BFS) aminél a feszítőfába a fenti AD, AE, DB, DC, EF élek kerülnek be ebben a sorrendben, és van olyan A -ból indított mélységi bejárás (DFS) is, hogy a kapott feszítőfa egy út. Válaszát indokolja is.
5. Adott egy n csúcsú bináris keresőfa. Adjon $O(n)$ lépésszámú eljárást, ami meghatározza, hogy hány olyan csúcsa van a fának, aminek a részfájában páros sok csúcs van. (Egy csúcs részfája magából a csúcsból és a csúcs összes leszármazottjából áll.)
6. Szomszédossági mátrixával adott egy élsúlyozott, irányítatlan gráf, ami egy hangyakolónia alaprajzát adja meg. A gráf csúcsai a kolónia csomópontjai, az élek az ezek között vezető járatoknak felelnek meg, az élek súlya pedig azt adja meg, hogy az adott útszakaszt mennyi idő alatt tudja megtenni egy hangya (feltesszük, hogy az összes hangya ugyanolyan gyorsan megy). A gráf két adott pontjába, A -ba és B -be leteszünk egy-egy hangyát. Szeretnénk meghatározni, hogy hány olyan csomópont van, amikre igaz, hogy ugyanakkor ér el oda a két hangya, ha egyszerre indulnak A -ból és B -ből és az út során a számukra legjobb útvonalat használják.

Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk oldani azt a feladatot? (A szokásos módon n a csomópontok számát jelöli.)

Algoritmusok és gráfok - 3. vizsga
2024. január 16.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. (a) Rajzolja fel az alábbi szomszédossági listával megadott irányított gráfot:

$A : B, C, E, F; \quad B : -; \quad C : B, D; \quad D : A, F; \quad E : D, F; \quad F : -$

(b) Hajtson végre egy mélységi bejárást ezen a gráfon az A csúcsból kiindulva, adja meg a kapott mélységi feszítőfát és a bejáráshoz tartozó kétféle számozást.

(c) A (b) pontban leírt mélységi bejárás segítségével az órán tanult módszerrel döntse el, hogy ez a gráf DAG-e vagy sem.

2. A $8, 3, 1, 7, x, 2, 6$ tömböt rendezzük kiválasztásos rendezéssel és beszúrásos rendezéssel is, x egy olyan egész szám, ami máshol nem fordul elő a tömbben.

(a) Előállhat-e a kiválasztásos rendezés futása során az $1, 3, x, 7, 8, 2, 6$ átmeneti helyzet?

(b) Előállhat-e a beszúrásos rendezés futása során az $1, 3, x, 7, 8, 2, 6$ átmeneti helyzet?

Ha előállhat ez a helyzet, akkor adjon is meg indoklással együtt egy olyan x értéket, amikor ez megtörténhet, ha pedig nem állhat elő ez az átmeneti helyzet, akkor mutassa meg ezt.

3. Egy bináris keresőfát preorder bejárással bejárva az alábbi sorrendben olvassuk ki a fa elemeit: $10, 6, 5, 9, 8, 17, y, 14$, ahol y a fában máshol elő nem forduló pozitív egész szám. Adja meg az **összes** olyan bináris keresőfát, ahol ez előállhat és minden ilyen fához adja meg y **összes** lehetséges értékét.

4. Dijkstra algoritmusát használjuk az A, B, C, D, E csúcsokból álló irányított, élsúlyozott G gráfban a C kezdőcsúcsból, eközben az *eddigilegjobb* tömb így változik (az egyes sorok az *eddigilegjobb* tömb változását mutatják egy-egy csúcs KÉSZ halmazba kerülése után).

A	B	C	D	E
6	∞	*	2	∞
4	8	*	*	∞
*	5	*	*	8
*	*	*	*	8
*	*	*	*	*

(a) Milyen sorrendben kerülnek be a csúcsok a KÉSZ halmazba és honnan látszik ez a táblázatból?

(b) Mutassa meg, hogy biztosan van él a gráfban A-ból B-be és adja meg indoklással együtt azt is, hogy mi lehet ennek az élnek az élsúlya.

(c) Lehetséges-e, hogy van él a gráfban B-ből E-be? Ha nem lehetséges, akkor lássa be ezt, ha pedig lehetséges, akkor azt is adja meg indoklással együtt, hogy milyen értékeket vehet fel ennek az élnek a súlya..

5. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti egy szomszédossági mátrixával adott n csúcsú **irányított** G gráfról, hogy igaz-e, hogy a gráfban minden csúcs esetén megegyezik a csúcs ki- és be-fokának paritása. (Azaz azt kell eldönteni, hogy minden csúcs olyan-e, hogy a ki-foka pontosan akkor páros, ha a be-foka is páros.)

Először vázolja egy ilyen algoritmus működését pár mondatban szövegesen, majd adjon meg egy pszeudokódot is erre a feladatra (és persze ennél a feladatnál se feledkezzen el a helyesség és a lépésszám belátásáról).

6. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú irányítatlan, nem élsúlyozott G gráf, melyben néhány (legalább kettő) csúcs meg van jelölve fontos csúcsként. Azt szeretnénk eldönteni, hogy igaz-e, hogy mindegyik fontos csúcsból mindegyik másik fontos csúcsba vezet út a gráfban.

Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk oldani ezt a feladatot?

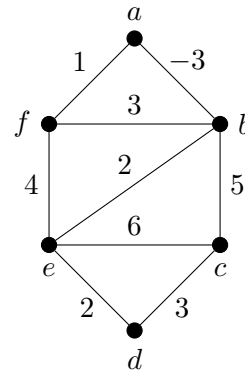
A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Egy 11 méretű hash táblába 7 kulcsot szűrtünk be nyílt címezéssel, lineáris próbával, a $h(K) = K$ maradéka 11-gyel hash függvényt használva. (A lineáris próba lefele indul.) Törlés nem történt. Ezután a hash táblát lemásoltuk kézzel egy papírra, de sajnos az egyik számot rosszul írtuk le.
- (a) Melyik az a szám, ami hibásan szerepel az alábbi táblában és miért?

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	12		14	5	6	17				16

- (b) Adjon meg egy olyan számot, ami lehetett az eredeti, hibásan lemásolt szám (azaz ami helyett az a) pontban adott érték került be a táblázatba). Elég egy ilyen értéket megadni, de a választ itt is indokolni kell.
2. Egy négy csúcsú irányított gráfban az A, B, C, D és a B, A, D, C sorrend is topologikus sorrend. Adjon indoklással együtt egy, a lehető legtöbb élet tartalmazó olyan gráfot, ahol ez előfordulhat és mutassa meg azt is, hogy ennél több él nem szerepelhet egy ilyen gráfban.

3. Az alábbi gráfon futtatjuk Prim algoritmusát az a csúcsból.



- (a) Az ab és af élek beválasztása után hogyan néz ki a *legkisebb* tömb és miért?
- (b) Melyik élet választja be ezután az algoritmus és hogyan változik ettől a *legkisebb* tömb? Röviden indokolja is a választ.
- (c) Hogyan fejeződik be azután az algoritmus, mely élek kerülnek a feszítőfába és milyen sorrendben? (Itt a *legkisebb* tömb változásait már nem kell megadni, de röviden indokolja a választ.)
4. Egy hat csúcsú irányítatlan, nem élsúlyozott G gráfban a szélességi bejárást (BFS) az A csúcsból futtatva az AB, AD, BC, DE, DF élek kerülnek be a szélességi feszítőfába ebben a sorrendben.
- (a) Lehetséges-e, hogy a G gráfban az E csúcs távolsága a C csúctól 1?
- (b) Lehetséges-e, hogy a G gráfban az E csúcs távolsága a C csúctól 3?
- (c) Lehetséges-e, hogy a G gráfban az E csúcs távolsága a C csúctól 5?
5. Adott két AVL fa, mindegyikben n számot tárolunk, n értéke páratlan, azaz a fának páratlan sok csúcsa van. Egy fán belül a számok különböznek, de a két fának lehetnek közös értékei.
- (a) Adjon $O(\log n)$ lépésszámú eljárást, ami eldönti, hogy a második fa legkisebb eleme megegyezik-e az első fa legnagyobb elemével.
- (b) Adjon $O(n)$ lépésszámú eljárást, ami eldönti, hogy a második fa középső eleme megegyezik-e az első fa középső elemével. (Egy fa középső eleme az az érték, aminél a fában ugyanannyi kisebb, mint nagyobb szám szerepel.)
- (c) Adjon $O(n)$ lépésszámú eljárást, ami eldönti, hogy a két fában pontosan ugyanazok a számok szerepelnek-e.
6. Szomszédossági mátrixával (legyen ennek neve A) adott egy n csúcsú irányítatlan, élsúlyozott G gráf, mely egy ország úthálózatát írja le. A gráf csúcsai a városok, az élek a városok között menő közvetlen utak, az élek súlyai pedig az utak hosszát adják meg kilométerben. Adott továbbá egy másik n -szer n -es M mátrix is, aminek $M[i, j]$ értéke azt adja meg százalékban, hogy mekkora a legnagyobb meredekség, ami az i városból j városba haladva valamely felfele menő emelkedőn előfordul. $M[i, j]$ értéke végtelen, ha nincsen út i és j között, $M[i, j]$ értéke nulla, ha van út és az út teljesen vízszintes vagy végig lefele halad, egyébként az érték pozitív.
- Szeretnénk egy kijelölt S városból eljutni egy másik kijelölt T városba, de úgy, hogy az út során ne legyen 10%-osnál meredekebb emelkedő (csotrogány autónkkal nem merünk ennél meredekebb utakra merészkedni). Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk határozni, hogy legkevesebb hány kilométert kell ehhez megtennünk?