

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. (a) Egy kezdetben üres bináris keresőfába a 3, 10, 1, 7, 6, 8, 2 számokat szúrjuk be ebben a sorrendben a beszúrásra használt tanult eljárással. Rajzolja fel a kapott fát. (Itt kivételesen indokolni nem kell.)
(b) AVL-fa-e ez a bináris keresőfa?
(c) A tanult algoritmussal kitöröljük az (a) pontban kapott fából a 3-as számot. Rajzolja fel az új fát és röviden írja le, hogy hogyan kapta.
2. A 100 hosszú 51, 52, 53, ..., 99, 100, 1, 2, 3, 4, ..., 48, 49, 50 tömböt rendezzük kiválasztásos, beszúrásos és buborékrendezeéssel. Melyik esetben történik a **legkevesebb csere**? (A válaszhoz nem feltétlenül kell kiszámolni a cserék pontos számát az egyes esetekben.)

3. (a) Az alábbi (ismeretlen értékeket tartalmazó) szomszédossági mátrix egy hat csúcsú **irányítatlan** gráfot ír le. Határozza meg az ismeretlen értékeket, ha tudjuk, hogy a gráf fa.
(b) Adja meg a gráf szomszédossági listás reprezentációját is.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	u	0
2	x	0	y	0	0	0
3	1	z	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0
5	v	0	0	1	0	1
6	0	0	0	0	1	0

4. Dijkstra algoritmusát használjuk az A, B, C, D, E csúcsokból álló **irányított**, élsúlyozott G gráfban az A kezdőcsúcsból, eközben az *eddig legjobb* tömb így változik (az egyes sorok az *eddig legjobb* tömb változását mutatják egy-egy csúcs KÉSZ halmazba kerülése után).

A	B	C	D	E
*	3	∞	5	∞
*	*	4	5	7
*	*	*	5	6
*	*	*	*	6
*	*	*	*	*

- (a) Lehetséges-e, hogy van a gráfban él A -ból E -be? Ha lehetséges, akkor adja meg azt is, hogy mi lehet ezen él súlya.
(b) Lehetséges-e, hogy van a gráfban él C -ből E -be? Ha lehetséges, akkor adja meg azt is, hogy mi lehet ezen él súlya.
(c) Lehetséges-e, hogy van a gráfban él B -ből D -be? Ha lehetséges, akkor adja meg azt is, hogy mi lehet ezen él súlya.
5. Adott egy n csúcsú bináris keresőfa, amiben néhány csúcs pirosra van színezve, a többi csúcs zöld. (A fa úgy van megadva tehát, hogy minden csúcsnál a tárolt számérték mellett az is fel van jegyezve, hogy mi a csúcs színe.)
Adjon $O(n)$ lépésszámú eljárást, ami meghatározza, hogy hány olyan csúcsa van a fának, aminek a részfájában minden csúcs piros. (Egy csúcs részfája magából a csúcsból és a csúcs összes leszármazottjából áll.)
6. Egy nagyvárosban takarékoskodni kell a közvilágítással, ezért úgy döntenek, hogy néhány helyen csak tartalékvilágítást használnak. Szomszédossági mátrixával adott a város úthálózatának összefüggő, élsúlyozott, irányítatlan gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy hány lámpa van a két kereszteződés között vezető közvetlen utcán (ez a szám legalább 1 minden utcára). A lámpákat útszakaszonként lehet takarékra kapcsolni, azaz két csomópont között vagy minden lámpa takarékon van vagy egy sincsen. Az útszakaszokat egymástól függetlenül lehet szabályozni és a városban használt összes lámpa egyforma (ugyanonnan vették), azaz minden egyes lámpa takarékra állítása ugyanannyi spórolást eredményez.
A város vezetése szeretné úgy megtervezni a világítás átalakítását, hogy bármelyik csomópontból bármelyik csomópontba el lehessen jutni úgy, hogy végig rendesen (nem tartalékon) kivilágított utcákon haladunk, de ezt úgy szeretnék elérni, hogy a lehető legtöbb lámpát szeretnék tartalékra kapcsolni (vagyis a lehető legkevesebb lámpát akarják teljes fényerővel használni).
Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk oldani ezt a feladatot (a szokásos módon n a csomópontok számát jelöli)?

Algoritmusok és gráfok - 2. vizsga
2023. január 10.

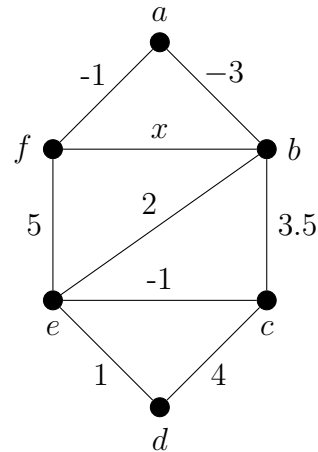
A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Igaz-e, hogy az alábbi szomszédossági listával adott irányított gráfban az E, B, A, C, D, F sorrend egy topologikus sorrend?

$A : D, F; \quad B : A, C; \quad C : D; \quad D : -; \quad E : A, B; \quad F : -;$

2. Összefésüléses rendezéssel rendezzük a 8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 tömböt, majd ezután szintén összefésüléses rendezéssel rendezzük a 7, 8, 6, 5, 2, 1, 4, 3 tömböt is.
Melyik esetben történik több összehasonlítás?

3. Az alábbi gráfban az x élsúly nem ismert (x nem feltétlenül egész szám). Prim algoritmusát az a csúsból futtatva az algoritmus az ab és af éleket választja be először.



- (a) Mennyi lehet x értéke?
(b) Melyik éleket választja be a Prim algoritmus az ab és af élek után és milyen sorrendben és miért?
(c) Ha Kruskal algoritmusát futtatnánk ugyanezen gráfon, akkor mennyi lenne az így kapott feszítőfa értéke?
4. Egy hat csúcsú irányított gráf csúcsait egy mélységi bejárás a, e, b, c, d, f sorrendben járja be, a befejezési számok pedig ezek: $a: 6; b: 1; c: 3; d: 2; e: 4; f: 5$.
(a) Lehetséges-e, hogy a gráfban van él d -ből e -be?
(b) Lehetséges-e, hogy a gráfban van él d -ből f -be?
5. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú irányítatlan, élsúlyozatlan G gráf. Adjon $O(n^3)$ lépésszámú algoritmust, ami G mátrixából előállítja annak az irányítatlan, élsúlyozott G_1 gráfnak a szomszédossági mátrixát, aminek csúcsai megegyeznek G csúcsaival és G_1 -ben pontosan akkor van két csúcs összekötve, ha G -ben van közös szomszédjuk és ilyenkor az él súlya a G -beli közös szomszédok számával egyezik meg.
6. Egy szomszédossági mátrixával adott összefüggő, n csúcsú, irányítatlan G gráfban minden csúcs színes: piros vagy kék. A csúcsok színei egy, a csúcsokkal indexelt S tömbben adottak. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami egy adott piros A csúcsához megkeresni azt az A -tól különböző piros X csúcsot vagy csúcsokat, amibe A -ból a lehető legkevesebb (esetleg nulla darab) kék csúcson áthaladva el tudunk jutni úgy, hogy közben A -n és X -en kívül piros csúcsot nem érintettünk. Ha több ilyen tulajdonságú piros X csúcs is van, akkor az összeset keressük meg.

Algoritmusok és gráfok - 3. vizsga
2023. január 17.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Az alábbi (ismeretlen értékeket tartalmazó) szomszédossági mátrix egy hat csúcsú **irányított** gráfot ír le. Adja meg x és y összes lehetséges értékét, ha tudjuk, hogy a gráf DAG.

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	0	x	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	y	0
5	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0

2. A $10, 3, 7, 1, 5, x$ számsorozatot beszűrőrendezéssel rendezzük. Adja meg x összes lehetséges értékét, ha tudjuk, hogy a teljes rendezés alatt 8 csere történik és x olyan pozitív egész szám, ami máshol nem szerepel a sorozatban.
3. Egy 7 méretű hash táblába 7 kulcsot szűrtünk be nyílt címzéssel, lineáris próbával, a használt hash függvény a $h(K) = K$ maradéka 7-tel osztva függvény volt és az alábbi táblát kaptuk. (A lineáris próba lefele indul.) Törlés nem történt.
- (a) Melyik lehetett az elsőnek beszűrt szám? Az összes lehetséges értéket adja meg.
- (b) Melyik lehetett az utoljára beszűrt szám? Az összes lehetséges értéket adja meg.

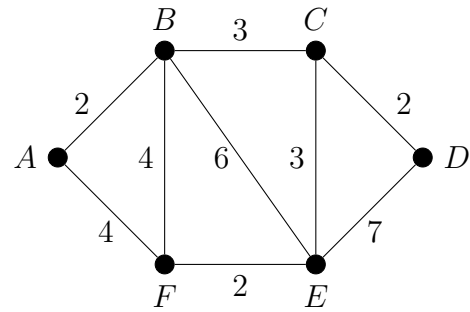
0	1	2	3	4	5	6
5	9	3	10	19	12	8

4. Egy hat csúcsú, **irányítatlan** G gráfon szélességi bejárásokat (BFS) futtattunk úgy, hogy amikor választási lehetőségünk van, akkor mindig az ábécében korábban levő lehetőséget választjuk. Ha a szélességi bejárást az A csúcsból indítjuk, akkor az AD, AE, AF, EB, BC élek kerülnek be a fába, ebben a sorrendben, ha viszont az F csúcsból kezdjük a bejárást, akkor az FA, FB, FD, FE, BC éleket választja az algoritmus ebben a sorrendben. Melyik az az egyetlen pontpár, amiről a fentiek alapján nem lehet eldönteni, hogy van-e köztük él a G gráfban?
5. Adott egy n csúcsú bináris keresőfa, amiben különböző egész számokat tárolunk. Adjon $O(n)$ lépésszámú eljárást, ami meghatározza azokat a csúcsokat, amikre a csúcs leszármazottjaiban tárolt számok összege páratlan szám. (Egy x csúcs leszármazottjai az x gyökerű részfa elemei, beleértve magát az x csúcsot is.)
6. Egy ország úthálózatát egy szomszédossági mátrix-szal adott irányítatlan, élsúlyozott G gráf írja le. A gráf csúcsai a városok, az élek a városok közt vezető közvetlen utak, az élek súlya pedig az adott útszakasz megtételéhez szükséges idő. Van három különleges város az országban, A_1, A_2, A_3 és mi egy adott S városból szeretnénk elmenni egy másik adott T városba a lehető leggyorsabban úgy, hogy a három különleges város közül legfeljebb egyen megyünk át eközben. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy ezzel a feltétellel mennyi idő alatt lehet leggyorsabban eljutni S -ből T -be.

Algoritmusok és gráfok - 4. vizsga
2023. január 24.

A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Az alábbi gráfon a Dijkstra-algoritmussal határozza meg az A -ból az összes többi pontba vezető legrövidebb út hosszát. (Indokolni nem kell, de látszódjon, hogy lépéenként hogyan változik a *távolság* tömb, az *eddigig_legjobb* tömb és a KÉSZ halmaz.)



2. A $8, 3, 7, 6, 5, 4, 1, 2$ tömböt kétszer rendezzük, először kiválasztásos rendezéssel, majd beszúrásos rendezéssel.
- (a) Előáll-e az $1, 2, 8, 3, 7, 6, 5, 4$ közbülső állapot a kiválasztásos rendezés során?
- (a) Előáll-e az $1, 2, 8, 3, 7, 6, 5, 4$ közbülső állapot a beszúrásos rendezés során?
3. Egy irányított, élsúlyozott G gráfban a csúcsok b, a, e, c, d, f sorrendje topologikus sorrend, ezen topologikus sorrenddel alkalmazzuk a DAG-ban használható tanult eljárást az a csúcsból induló legrövidebb utak meghatározására.
- (a) Mennyi *távolság* $[b]$ és *távolság* $[a]$ értéke és miért?
- (b) Tegyük fel, hogy az algoritmussal már kiszámoltuk az e, c, d csúcsokra is a távolságokat és ezek a következők: *távolság* $[e] = -3$, *távolság* $[c] = 10$, *távolság* $[d] = 1$. *Távolság* $[f]$ értékét is meg akarjuk határozni az algoritmussal. Melyik élek létezését és élsúlyát kell tudnunk ehhez és ezekből az adatokból hogyan kapjuk meg *távolság* $[f]$ -et?
4. (a) Adjon meg egy olyan bináris keresőfát, aminek a csúcsait a preorder bejárás $7, 6, 4, 5, 8, 9, 10$ sorrendben olvassa ki. (Elég egy ilyen fát megadni, de azt meg kell indokolni, hogy ez a fa miért jó.)
- (b) Mutassa meg, hogy nincsen olyan bináris keresőfa, aminek a csúcsait a posztorder bejárás $7, 6, 4, 5, 8, 9, 10$ sorrendben olvassa ki.
5. Adott két AVL-fa, melyek mindegyike $n \geq 2$ különböző egész számot tárol. Az elemek egy fán belül különböznek, de a két fának lehetnek közös tárolt elemeik. Adott továbbá egy szintén n elemből álló, különböző egész számokat tartalmazó (nem feltétlenül rendezett) tömb és azt szeretnénk eldönteni, hogy van-e a tömbnek olyan eleme, ami mindkét fában szerepel. Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú eljárást erre a feladatra.
6. Szomszédossági mátrixával adott egy város úthálózatának irányítatlan gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak. A várost egy folyó szeli ketté, a folyón több híd is van, csak ezeken lehet átkelni a folyó egyik partjáról a másikra. A hidak is egy-egy élet jelentenek a gráfban, a hidak egy külön listában vannak felsorolva. A város számos csomópontjában van színház, ezek helye egy, a csúcsokkal indexelt H tömbben adott úgy, hogy $H[v]$ pontosan akkor 1, ha van a v csomópontban színház, különben pedig $H[v] = 0$. (Egy csomópontban legfeljebb egy színház van.)
- Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy az adott A csomópontban levő lakásunktól hány színházba tudunk eljutni úgy, hogy közben nem megyünk át hídon. (A szokásos módon n a csomópontok számát jelöli.)