

A válaszokat indokolni kell. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Az alábbi irányított G gráf csúcsai a, b, c, d, e, f , élei pedig az alábbi éllistával adottak:

a : $c(8), f(6), e(12)$; **b** : $a(3), d(-8), e(-5)$; **c** : $e(-1)$; **d** : $c(2), e(4), f(-2)$; **e** : $-$; **f** : $e(1)$;

Topologikus sorrend-e ebben a gráfban a csúcsok b, a, d, f, e, c sorrendje és miért?

2. Adott egy 100 hosszú tömb, melyben a $100, 99, 98, \dots, 3, 2, 1$ számok vannak ebben a csökkenő sorrendben. Melyik rendező algoritmus futtatása során történik a legkevesebb **csere** az alábbi lehetőségek közül és miért?

A lehetőségek: buborékredezés, beszúrásos rendezés, kiválasztásos rendezés.

3. Egy bináris keresőfát preorder bejárással bejárva a számokat $8, 3, 7, 4, 5, 10, 9, 12$ sorrendben látjuk.

(a) Mi a fa gyökere és miért?

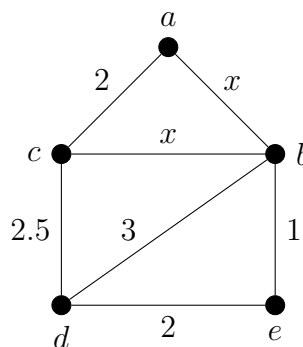
(b) Mely számok vannak a gyökér jobb- és bal-részfájában és miért?

(c) Hogy néz ki a fa és miért ez az egyetlen lehetőség?

4. Az alábbi gráfon, ahol x értéke nem ismert, futtatjuk Prim algoritmusa az a csúcsból egy minimális feszítőfa keresésére és azt tapasztaljuk, hogy az első három beválasztott él ab, be, ed ebben a sorrendben. (Az x értéke ugyanaz mindkét élen, ahol előfordul.)

(a) Mi lehet x értéke és miért?

(b) Melyik élet (éleket) választhatja be az algoritmus a fenti három él után és miért?



5. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú irányítatlan G gráf. Adjon $O(n^3)$ lépésszámú algoritmust, ami G mátrixából előállítja annak az irányítatlan G_1 gráfnak a szomszédossági mátrixát, aminek csúcsai megegyeznek G csúcsaival és G_1 -ben pontosan akkor van két csúcs között él, ha G -ben nincsen köztük él, de van közös szomszédjuk.

6. Szomszédossági mátrixával adott egy város úthálózatának élsúlyozott, irányítatlan gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak (melyek mindkét irányban használhatók, nincsenek egyirányú utcák), az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mekkora adott útszakasz hossza. A várost egy folyó szeli ketté, a folyón két híd van, csak ezeken lehet átkelni a folyó egyik partjáról a másik partra (a hidak is egy-egy élet jelentenek a gráfban, azt ismerjük, hogy melyik élek a hidak).

Lakásunk az A csomópontban van, egy barátunk pedig a B csomópontban lakik, az A és B csomópontok a folyó ellentétes oldalán találhatóak. Barátunk karanténba került, de szeretnénk neki ajándékot vinni gyalog, a lehető legrövidebb utat megtéve, úgy, hogy az egyik hidat odafele, a másik hidat visszafelé használjuk (azaz a lakásunkból indulunk, oda is érünk vissza és csak kétszer kelünk át a folyón, egyszer odafele, egyszer visszafelé).

Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk találni ezt a legjobb útvonalat (a szokásos módon n a csomópontok számát jelöli)?

A válaszokat indokolni kell. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Az alábbi irányított, élsúlyozott G gráf csúcsai a, b, c, d, e, f , élei pedig az alábbi éllistával adottak: $\mathbf{a} : c(8), d(7), f(6), e(12)$; $\mathbf{b} : a(3), d(-8), e(-5)$; $\mathbf{c} :-$; $\mathbf{d} : c(2), e(4), f(-2)$; $\mathbf{e} :-$; $\mathbf{f} : c(5), e(1)$; Ez a gráf egy DAG és topologikus sorrend benne a csúcsok b, a, d, f, c, e sorrendje (ezt nem kell leellenőrizni).

Ezen topologikus sorrenddel alkalmazzuk a DAG-ban használható tanult eljárást (SzuperCsodás algoritmus) az a csúcsból induló legrövidebb utak meghatározására.

(a) Mennyi lesz a b és az a csúcsokra kiszámolt távolság és miért?

(b) Ha már tudjuk, hogy a d, f és c csúcsokra kiszámolt távolságok a következők: $távolság[d] = 7$, $távolság[f] = 5$, $távolság[c] = 8$, akkor mennyi lesz $távolság[e]$ és miért? (Azt nem kell leellenőrizni, hogy a d, f, c csúcsokra megadott távolságok helyesek.)

2. A 2, 10, 3, 5, 1, 4, 6 tömb rendezése során előállhat-e az 1, 2, 3, 6, 5, 4, 10 helyzet, ha

(a) buborékrendezést használunk? (b) kiválasztásos rendezést használunk?

A válaszait indokolja is meg!

3. Egy bináris keresőfában csupa különböző egész számot tárolunk és a 9-es szám keresésekor a keresési út mentén a 18, 3, x , 7, 9 kulcsokat látjuk ebben a sorrendben.

A 2, 6, 8, 10, 20 értékek közül melyekkel lehet egyenlő x és miért?

Figyelem, mind az 5 értékről nyilatkoznia kell!

4. Dijkstra algoritmusát használjuk az A, B, C, D, E csúcsokból álló irányított, élsúlyozott G gráfban a B kezdőcsúcsból, eközben az *eddigilegjobb* tömb így változik (az egyes sorok az *eddigilegjobb* tömb változását mutatják egy-egy csúcs KÉSZ halmazba kerülése után).

A	B	C	D	E
5	*	∞	3	∞
4	*	7	*	∞
*	*	6	*	8
*	*	*	*	8
*	*	*	*	*

Milyen csúcsokkal van biztosan összekötve az A csúcs (bejövő és kimenő élekre is gondoljon), mi ezeknek az élsúlya és miért?

5. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú irányítatlan G gráf.

(a) Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni és hogyan, ha $O(n^2)$ lépésben el akarjuk dönteni, hogy G összefüggő-e?

(b) Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben eldönti, hogy G -re igaz-e, hogy nem összefüggő, de van olyan hiányzó él, aminek a behúzásával összefüggővé tehető.

(c) Adjon algoritmust, ami $O(n^2)$ lépésben nemcsak megválaszolja a (b) rész kérdését, de meg is ad egy olyan élet, aminek behúzásával a nem összefüggő G gráf összefüggővé válik.

6. Egy nagyvárosban jelenleg egyáltalán nincsenek még bicikliutak, de az új városvezetés szeretné elérni, hogy néhány út külső sávjában biciklisávok kerüljenek felfestésre (a kiválasztott utak mindkét oldalán, azaz a bicikliutak mindkét irányba használhatóak). Ez csak úgy lehetséges, hogy ezen utak mentén néhány (de legalább egy) parkolóhely megszűnik. A város vezetése szeretné úgy megtervezni a bicikliutakat, hogy a városházától mindenhol el lehessen jutni bicikliúton, de ehhez a lehető legkevesebb parkolóhelyet kelljen megszüntetni (tartva az autók haragjától). Szomszédossági mátrixával adott a város úthálózatának összefüggő, élsúlyozott, irányítatlan gráfja: a csúcsok a csomópontok (a városháza a H jelű csomópontban van), az élek a csomópontok közötti közvetlen utak (melyek mindkét irányban használhatóak, nincsenek egyirányú utcák), az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi parkolóhely szűnik meg, ha ezen a szakaszon bicikliút készül.

Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk oldani ezt a feladatot (a szokásos módon n a csomópontok számát jelöli)?

A válaszokat indokolni kell. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Nyílt címezéssel hasheltünk egy kezdetben üres, 11 elemű táblába nyolc kulcsot, a $h(k) = k$ maradéka 11-gyel osztva hash-függvényt és lineáris próbát használva. A beszúrások után az alábbi állapotot kaptuk:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12				6	19	7	8	9	1

- (a) Magyarázza el, hogy hogyan került az 1-es kulcs a 10-es cellába a beszúrás során.
 (b) A fenti táblából kitöröljük a 19-et, majd keressük a 30-at. Hogyan zajlik ez a keresés?
 (c) A fenti táblából kitöröljük a 19-et és beszúrjuk a 20-at. Hogyan zajlik ez a beszúrás?
2. (a) Rajzolja fel az alábbi szomszédossági mátrixhoz tartozó irányított gráfot.

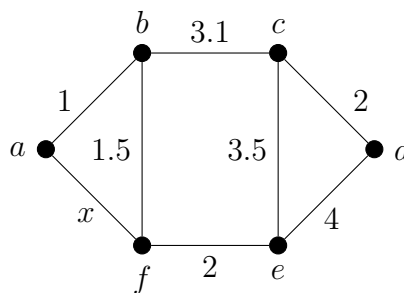
	A	B	C	D	E	F
A	0	1	1	1	1	0
B	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	0	0
D	0	0	0	0	0	1
E	0	0	0	1	0	1
F	0	0	0	0	0	0

- (b) Hajtson végre egy mélységi bejárást ezen a gráfon és a segítségével az órán tanult módszerrel döntse el, hogy ez a gráf DAG-e vagy sem.
3. Dijkstra algoritmusát használjuk az A, B, C, D, E csúcsokból álló irányított, élsúlyozott G gráfban az A kezdőcsúcsból, eközben az *eddigilegjobb* tömb így változik (az egyes sorok az *eddigilegjobb* tömb változását mutatják egy-egy csúcs KÉSZ halmazba kerülése után).

	A	B	C	D	E
*		1	∞	5	∞
*	*		5	2	∞
*	*	*	4	*	∞
*	*	*	*	*	7
*	*	*	*	*	*

Adja meg a *honnán* tömb értékét az egyes lépések után (egy ugyanilyen méretű táblázat formájában) és indokolja is meg a választát.

4. Az alábbi gráfon, ahol az x élsúly nem ismert, futtatva Kruskal algoritmusát egy minimális feszítőfa keresésére az első három él, amit az eljárás beválaszt: ab, bf, fe . Adja meg x összes lehetséges értékét (röviden indokolva választát) és írja le, hogy mely éleket és milyen sorrendben választja be ezután az algoritmus és miért.



5. Adott egy n csúcsú bináris keresőfa, amiben minden nem-levél csúcsnak két gyereke van és amiben néhány csúcs zöldre van színezve (a többi színtelen). Adjon $O(n)$ lépésszámú eljárást, ami eldönti, hogy van-e a fának olyan nem-levél csúcsa, aminek jobb és bal részfájában ugyanannyi zöld csúcs található.
6. Egy téli napon egy országban rengeteg helyen esett ónos eső, a közlekedést felügyelő szervezet az utakat kategóriákba sorolta: 1-es a biztonságos útszakasz, 2-es a kicsit veszélyes, 3-as pedig a járhatatlan. Az ország úthálózatának ónos eső utáni helyzetét egy élsúlyozott irányítatlan gráf írja le, ahol csúcsok a városok, élek a városok között vezető utak, az élek súlya pedig a felügyelet által az útra kiadott kategória száma (1-es, 2-es vagy 3-as).

El szeretnénk dönteni, hogy el tudunk-e menni az A városban levő lakásunkból a B városban levő nyaralónkba úgy, hogy végig biztonságos utakon haladunk. Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben választ akarunk kapni (szokás szerint n a csomópontok száma)?

A válaszokat indokolni kell. Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Egy irányított, élsúlyozott G gráfban a csúcsok b, e, f, a, c, d sorrendje topologikus sorrend, ezen topologikus sorrenddel alkalmazzuk a DAG-ban használható tanult eljárást (SzuperCsodás algoritmus) az e csúcsból induló legrövidebb utak meghatározására.

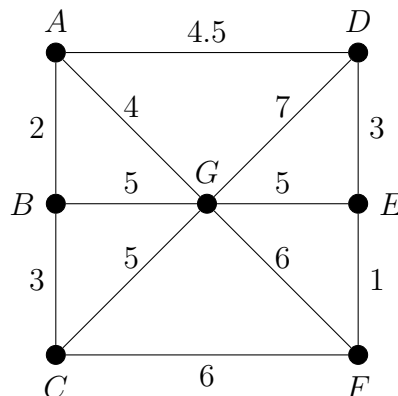
(a) Mennyi lesz a b és az e csúcsokra kiszámolt távolság és miért?

(b) Tegyük fel, hogy az algoritmus már kiszámolta az f, a, c csúcsokra is a távolságokat, ezek a következők: $távolság[f] = -2$, $távolság[a] = 12$, $távolság[c] = 3$. Az algoritmus használatához melyik élek létezését és élsúlyát kell tudnunk ahhoz, hogy ezek alapján kiszámoljuk $távolság[d]$ értékét? Hogyan kell az algoritmus alapján a kapott információból meghatározni $távolság[d]$ értékét?

2. Minimális súlyú feszítőfát keresünk az alábbi gráfban két tanult algoritmus segítségével.

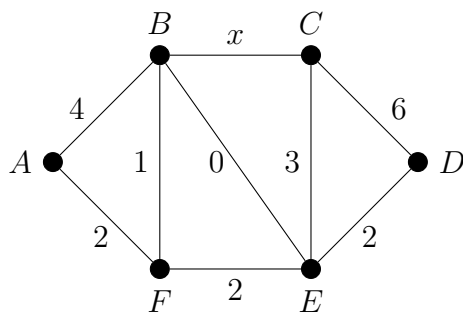
(a) Melyik éleket választja be és milyen sorrendben Prim algoritmus az A csúcsból indulva? Indoklásképpen 1-2 mondatban írja le, hogy mi alapján választja ki az algoritmus a következő éleket.

(b) Adjon meg olyan e és f éleket az a) pontban felsoroltak közül, amikre igaz, hogy Prim algoritmus előbb választja e -t és valamikor később f -et, de Kruskal algoritmus előbb választja f -et és csak valamikor később e -t. Indoklásképpen írja le 1-2 mondatban, hogy hogyan megy Kruskal algoritmus és hogy ebből hogyan következik, hogy az élpár jó.



3. Egy bináris keresőfában az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat tároljuk. Tudjuk, hogy a 6-os érték keresése során a 8, 1, 5, 6 számokat látjuk ebben a sorrendben és azt is tudjuk, hogy a posztorder bejárás a fa csúcsait 3, 2, 4, 7, 6, 5, 1, 9, 8 sorrendben látogatja meg. Rajzolja fel ezt a bináris keresőfát és indokolja meg, hogy miért csak ez az egy ilyen fa lehetséges.

4. Az alábbi gráfban az x élsúly nem ismert. Azt tapasztaljuk, hogy bárhogyan futtatjuk Dijkstra algoritmusát az A csúcsból induló legrövidebb utak hosszának meghatározására, a C csúcs mindig utolsó előttiként kerül be a KÉSZ halmazba. Adja meg x összes lehetséges értékét és indoklásképpen írja le, hogy a válasza hogyan következik a Dijkstra algoritmus futásából.



5. Adott két AVL-fa, mindkettőben ugyanannyi, $n \geq 3$ egész számot tárolunk. Az elemek egy fán belül különböznek, de a két fának lehetnek közös tárolt elemeik.

(a) Adjon $O(\log n)$ lépésszámú eljárást, ami eldönti, hogy igaz-e, hogy az első fa legkisebb eleme benne van-e a második fában.

(b) Adjon $O(\log n)$ lépésszámú eljárást, ami eldönti, hogy igaz-e, hogy az első fa második legkisebb eleme megegyezik-e a második fában tárolt legnagyobb elemmel.

6. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúsú irányítatlan G gráf.

Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy van-e a gráfban pontosan 17 csúcsból álló komponens.