

Algoritmusok és gráfok
Vizsga - Kifejtős feladatok
2020. december 22.

A feladatok megoldását indokolni kell, ide értve az algoritmusok helyességének és lépésszámának belátását is.

1. Adott három AVL-fa, mindegyikben n darab különböző egész számot tárolunk. Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami eldönti, hogy igaz-e, hogy az első fában tárolt elemek legalább fele benne van a másik két fa valamelyikében.
2. Egy **irányítatlan** G gráf csúcsai A, B, C, D, E, F, H . Mélységi bejárást (DFS-t) futtatunk a gráfon a D csúcsból, a DFS feszítőfába a DA, AB, AC, DE, EF, FH élek kerülnek be, ebben a sorrendben. Legfeljebb hány éle lehet a G gráfnak?
3. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú irányítatlan gráf és abban két kijelölt csúcs, a és b . A gráf minden csúcsa ki van színezve vagy pirosra vagy kékre, ez az információ egy C tömbben adott, amely a csúcsokkal van indexelve és ahol $C[v]$ a v csúcs színét adja meg. A gráf egy élet tarkának nevezzük, ha egyik végpontja piros, a másik pedig kék.

Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy van-e olyan út az a csúcsból a b csúcsba, ami csupa tarka élből áll és ha van ilyen, akkor azt is megmondja, hogy hány tarka élből áll a legrövidebb ilyen út.

Algoritmusok és gráfok
Vizsga - Kifejtős feladatok
2021. január 5.

A feladatok megoldását indokolni kell, ide értve az algoritmusok helyességének és lépésszámának belátását is.

1. Adott két tömb, mindegyikben n darab egész számot tárolunk, a számok között lehetnek egyformák. Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust, ami kiírja az összes olyan számot, ami az egyik tömbben egyszer, a másikban viszont egynél többször szerepel.
2. Dijkstra algoritmusát futtatjuk egy, az A, B, C, D, E, F csúcsokból álló irányítatlan gráfon. Az alábbi táblázat az *eddigilegjobb* tömb változását mutatja a futás közben.
 - (a) Melyek azok az élek, amik biztosan szerepelnek a gráfban és mi ezeknek a súlya?
 - (b) Lehetséges-e, hogy van a gráfban CF él?

A	B	C	D	E	F
*	∞	∞	1	3	∞
*	∞	5	*	2	4
*	7	4	*	*	4
*	6	*	*	*	4
*	5	*	*	*	*

3. Egy ország térképe egy n csúcsú irányítatlan gráffal adott: a csúcsok a városok, az élek pedig a városok közti közvetlen utak. Szeretnénk bicikliutakat építeni néhány út mellé úgy, hogy az országban bárholnan bárhova el lehessen jutni biciklivel (jelenleg egy bicikliút sincsen).

Egy n -szer n -es két dimenziós K táblázatban adott az, hogy az egyes utak mellé mennyi pénz lenne megépíteni a bicikliutat: $K[i, j]$ adja meg az építés költségét, ha i és j város között van út, egyébként $K[i, j]$ értéke végtelen.

A 42-es város nagyon gazdag, vállalja, hogy minden belőle kimenő út mellé megépíti saját költségén a bicikliutat, a központi költségvetésből csak a többi építést kell fedezni. Melyik tanult algoritmust lehet használni és hogyan, hogy $O(n^2)$ lépésben meghatározzuk, hogy melyik utakat építsük meg a 42-es város által építettek mellé, hogy a központi költségvetésből a lehető legkevesebbet kelljen erre költeni?

A feladatok megoldását indokolni kell, ide értve az algoritmusok helyességének és lépésszámának belátását is.

1. Adott egy n csúcsú AVL-fa, ami csupa különböző egész számot tárol és ahol minden csúcsban a tárolt érték mellett van egy számláló is, ami azt adja meg, hogy az adott csúcs részfájában hány csúcs található. (A részfa a csúcsból és az összes leszármazottjából áll, azaz a gyökér esetén a számláló n , a leveleknél pedig 1.)

Adott továbbá egy $1 \leq k \leq n$ érték is és az a feladatunk, hogy megkeressük a fában tárolt k -adik legkisebb elemet. (Azaz ha $k = 1$, akkor a legkisebbet, ha $k = 3$, akkor a rendezés szerinti harmadikat, stb.)

Adjon erre a feladatra $O(\log n)$ lépésszámú eljárást.

2. Egy **irányítatlan** G gráfban, melynek csúcsai A, B, C, D, E, F, H szélességi bejárást (BFS) futtatunk a C csúcsból úgy, hogy ha választási lehetőség adódik, akkor az ábécé szerint előbb levőt választjuk.

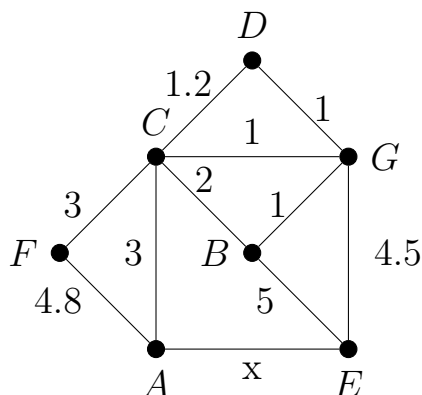
A BFS fába a CA, CB, AD, BF, BH, DE élek kerülnek be ebben a sorrendben. Mely csúcsokkal lehet összekötni az A csúcs a G gráfban, melyekkel nem és miért?

3. Egy város térképe egy n csúcsú összefüggő, **irányítatlan**, élsúlyozott gráffal adott: a csúcsok a város csomópontjai, az élek a köztük levő közvetlen utcák, az élek súlya pedig azt adja meg, hogy mennyi az adott útszakasz megtételéhez szükséges idő. Adott a városban három csomópont: A , B , és C . Szeretnénk a lehető leghamarabb eljutni A -ból B -be, de közben lehet, hogy be kell ugranunk C -be is egy csomagért. Szeretnénk tudni, hogy ez jár-e idővesztéssel és ha igen, akkor mennyivel.

Melyik tanult algoritmust lehet használni és pontosan hogyan, hogy $O(n^2)$ lépésben megkapjuk a választ?

A feladatok megoldását indokolni kell, ide értve az algoritmusok helyességének és lépésszámának belátását is.

1. Egy n csúcsú bináris keresőfa néhány csúcsa ki vannak színezve pirosra. Adjon $O(n)$ lépésszámú algoritmust annak meghatározására, hogy hány olyan csúcs van, aminek a részfájában páratlan sok piros csúcs van. (Egy csúcs részfáját maga a csúcs és az összes leszármazottja alkotja.)
2. Tekintsük az alábbi irányítatlan, élsúlyozott gráfot:



Mekkora lehet x értéke és miért, ha tudjuk, hogy a Prim algoritmus A csúcsból indított mindegyik futása beválasztja az AE élet a minimális költségű feszítőfába?

3. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú irányítatlan G gráf és adott továbbá a csúcsok egy X nemüres részhalmaza. Szeretnénk eldönteni, hogy van-e olyan komponense a G gráfnak, ami éppen az X csúcsaiból áll.

Melyik tanult algoritmust lehet használni és pontosan hogyan, hogy $O(n^2)$ lépésben megkapjuk a választ?