

- Az alábbi pszeudokód inputja egy n -szer n -es A tömb, melyben az i . sor j . elemét $A[i, j]$ jelöli ($1 \leq i, j \leq n$). A pszeudokód a futása során a tömb néhány elemét változtatja meg. Mutassa meg, hogy a kód által megadott algoritmus lépésszáma $O(n)$.

```

ciklus i = 1-től n-ig:
    A[i,i] := 0
ciklus vége
ciklus j = 1-től n-ig:
    ha (A[1,j] == 1 és A[2,j] == 1):
        A[j,j] := 1
ciklus vége

```

- Az összefésül eljárás inputját egy k elemű rendezett B tömb és egy ℓ elemű rendezett C tömb alkotja, az eljárás pedig kimenetként egy $k + \ell$ elemű rendezett D tömböt állít elő B és C elemeiből.

Írja le az órán tanult bizonyítást arra, hogy ez az eljárás $O(k + \ell)$ lépésszámú. (Magát az algoritmust nem szükséges részletesen leírni, csak annyiban, amennyiben ez a lépésszám indoklásához szükséges.)

- Egy irányított, élsúlyozott gráf élei a következők (zárójelben az élsúlyok):
 $AB(3), AC(2), BC(1), BD(2), BE(5), BF(3), CD(4), CF(5), DA(1), DE(2),$
 $DF(3), EF(1), FB(3), FC(1).$

Dijkstra algoritmusát futtatjuk ebben a gráfban, az A csúcsból indulva, néhány lépés után a KÉSZ halmazban az A, B, C csúcsok vannak, a d tömb állapota pedig ez:

A	B	C	D	E	F
★	★	★	5	8	6

- Melyik csúcs kerül be a következő lépésben a KÉSZ halmazba és miért?
 - Hogyan néz ki a d tömb, amikor az új csúcs KÉSZ-be kerülése után a szükséges módosítások megtörténnek és miért?
- Az alábbi irányítatlan G gráfban (ahol az x élsúly nem ismert) futtatjuk az a csúcsból a Prim algoritmust és azt tapasztaljuk, hogy az ab, bd, de, bc élek kerülnek be a minimális feszítőfába, ebben a sorrendben. Bizonyítsa be, hogy x értéke csak 2 lehet.
 G élei: $ab(1), ac(x), bc(2), bd(x), cd(3), ce(4), de(1).$

5. Egy kezdetben üres, 11 méretű hash táblába nyílt címezéssel, lineáris próbával szűrtünk be néhány egész számot, majd egyet közülük kitöröltünk, így az alábbi állapotot kaptuk (* jelöli a törölt cellát, a kitöltetlen cellák mindvégig üresek voltak). A használt hash függvény a $h(K) = K$ maradéka 11-gyel osztva függvény volt.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11		13	6	26	*	17			9	10

Adjon meg egy olyan pozitív egész x értéket, ami a táblázatban nem szerepel és aminek a keresése során több lépést kell tennünk, mintha beszúrni akarnánk x -et. Magyarázza is el, hogy hogyan zajlik x keresése és beszúrása.

6. Igaz-e, hogy az alábbi irányított, élsúlyozott gráfban a B, C, D, A, E, F sorrend egy topologikus sorrend?

A gráf (irányított) élei: $AE, AF, BC, BD, BE, CA, CE, DE, DF$

7. Adott két teljes bináris keresőfa, mindegyikben n elemet tárolunk. Adjon $O(\log n)$ elemszámú eljárást, ami eldönti, hogy igaz-e, hogy az első fa minden eleme nagyobb, mint a második fa minden eleme.

(Emlékeztetőül: a teljes bináris fa olyan bináris fa, amiben minden szint tele van.)

8. Mátrixával adott egy város úthálózatának összefüggő, élsúlyozott, irányított, egyszerű gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi idő alatt tud az adott szakaszon egy biciklis futár végigmenni.

Egy, az f csúcsban tartózkodó biciklis futár azt a feladatot kapja, hogy a nála levő két csomagot a lehető leggyorsabban kézbesítse ki a város b és c csomópontjaiba (az mindegy, hogy milyen sorrendben kézbesít). Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni és hogyan, hogy $O(n^2)$ lépésben meghatározzuk, hogy milyen sorrendben kell a futárnak a csomagokat leadnia és mennyi a legrövidebb idő, ami alatt teljesíteni tudja a feladatát?

A válaszokat indokolni kell, de a feladatokban szereplő tanult algoritmusokat nem kell részletesen leírni, elég csak azokat a részeket kifejteni, amelyek az indokláshoz szükségesek.

1. Az alábbi pszeudokód inputja két n -szer n -es tömb, A és B , melyekben az i . sor j . elemét $A[i, j]$ illetve $B[i, j]$ jelöli ($1 \leq i, j \leq n$). A pszeudokód a futása során a B tömb néhány elemét változtatja meg. Mutassa meg, hogy a kód által megadott algoritmus lépésszáma $O(n^3)$.

```
ciklus i = 1-től n-ig:
    ciklus j = 1-től n-ig:
        ciklus k = 1-től n-ig:
            ha A[i,k] == A[j,k]:
                B[i,j] := 1
        ciklus vége
    ciklus vége
ciklus vége
```

2. **Ez a feladat az idei anyagban nincsen benne!**

Az órán tanult Bellman-Ford algoritmus az s kezdőcsúcsból az összes többi csúcsba a legrövidebb út hosszát úgy határozza meg, hogy $T[i, v]$ -vel jelölt értékeket számol ki minden $1 \leq i \leq n - 1$ egész számra, a gráf minden v csúcsára.

Mi $T[1, v]$ jelentése? Hogyan kell kiszámolni a gráf csúcsaira a $T[1, v]$ értékeket és miért?

3. A $3, 7, 1, x, 2, 12, 10$ inputon futtatva a beszúrásos rendezést egyszer csak az $1, 3, x, 7, 2, 12, 10$ állapotot kapjuk. Adja meg az összes olyan x egész számot, amire ez előfordulhat, ha tudjuk, hogy x egy olyan szám, ami máshol nem szerepel a tömbben.
4. Egy egyszerű, irányított G gráfon DFS-t (mélységi bejárást) futtattunk az A csúcsból. A csúcsokat A, C, D, B, E, F sorrendben látogattuk meg, a DFS feszítőfa élei pedig AC, CD, AB, BE, BF .
 - (a) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él E -ből A -ba?
 - (b) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él D -ből B -be?
5. Dijkstra algoritmusát lefuttatva egy egyszerű, irányított gráfban az A csúcsból, a futás végén a legrövidebb utak nyomkövetésére szolgáló *honnan* tömb így néz ki:

A	B	C	D	E	F	G
A	C	G	F	C	A	A

Mi a legrövidebb út A -ból E -be (azaz mely csúcsok és milyen sorrendben következnek az úton) és miért?

6. Egy szomszédossági mátrixával adott n csúcsú, irányított G gráfban adott a csúcsoknak egy $u_1, u_2, \dots, u_n$ sorrendje (itt minden csúcs pontosan egyszer szerepel). Azt szeretnénk eldönteni, hogy a csúcsok ebben a sorrendben irányított kört alkotnak-e a gráfban. Adjon erre a feladatra $O(n)$ lépésszámú algoritmust.
7. Mátrixával adott egy város úthálózatának összefüggő, élsúlyozott, irányítatlan, egyszerű gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy hány hómunkás tudja az adott útszakaszt letakarítani 1 óra alatt. Szeretnénk tudni, hogy legalább mennyi hómunkásra van szükség összesen ahhoz, hogy egy éjszakai hóesés után (ami reggel 6-kor elállt), a 7 órás munkakezdés után 1 órán belül a főtérről (ami egy csúcs a gráfban) a város összes csomópontja elérhető legyen letakarított úton.
Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben választ akarunk kapni, ahol n a csomópontok száma?
8. Adott két bináris keresőfa, mindegyikben n különböző elemet tárolunk. Adjon $O(n)$ lépésszámú eljárást, ami eldönti, hogy igaz-e, hogy a két fában ugyanazok a számok szerepelnek.

Algoritmusok és gráfok - Vizsga
2019. január 9.

A válaszokat indokolni kell, de a feladatokban szereplő tanult algoritmusokat nem kell részletesen leírni, elég csak azokat a részeket kifejtetni, amelyek az indokláshoz szükségesek.

1. Az alábbi pszeudokódban egy $*$ kiírása számít egy lépésnek. Mutassa meg, hogy a pszeudokód által megadott algoritmus lépésszáma $O(n^3)$.

```
ciklus i = 1-től (n-1)-ig:
    ciklus j = (i+1)-től n-ig:
        kiírunk j darab *-ot
    ciklus vége
ciklus vége
```

2. Írja le az órán tanult eljárást, amivel egy bináris keresőfában meg tudjuk találni a legkisebb tárolt elemet. Magyarázza el, hogy miért helyes ez az eljárás és mutassa meg, hogy a lépésszáma $O(h)$, ahol h jelöli a fa szintjeinek számát.
3. Mutasson példát olyan 5 csúcsú irányítatlan, összefüggő, egyszerű G gráfra és a gráfban a Prim algoritmus egy olyan futására, ahol egy, az algoritmus által később választott él súlya kisebb, mint egy korábban választotté.

A futás leírásakor az éleket kell felsorolni a beválasztás sorrendjében és röviden indokolni, hogy miért ezeket választja az eljárás.

4. **Ez a feladat az ideai anyagban nincsen benne!**

A Bellman-Ford algoritmust futtatjuk az

a: $b(1), d(3), e(7)$; **b:** $c(2), d(5)$; **c:** $d(-1), f(-4)$; **d:** $e(3)$; **e:** $-$; **f:** $d(x), e(2)$ éllistával adott gráfban, az **a** csúcsból (az x élsúly értéke nem ismert).

A T táblázat harmadik és negyedik sorában a $T[3, v]$ és $T[4, v]$ értékek így néznek ki:

	a	b	c	d	e	f
3	0	1	3	2	6	-1
4	0	1	3	1	1	-1

Mi lehet x értéke és miért?

5. Az órán tanult összefésülés eljárást futtatjuk az 1, 3, 5, 9 és 2, 10, y , 15, 16 rendezett tömbökön, ahol y értéke nem ismert.
- (a) Hány összehasonlításban vesz részt a 9-es érték és miért?
- (b) Hány összehasonlításban vesz részt az y elem és miért?
6. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú, irányítatlan G gráf és adott a csúcsok egy 3 színnel való színezése egy, a csúcsokkal indexelt S tömbben, ahol $S[v]$ a v csúcs színe: *lila*, *sárga* vagy *rózsaszín*.

Azt szeretnénk eldönteni, hogy ez egy olyan színezés-e, amiben azonos színű csúcsok között nem fut él G -ben. Adjon erre a feladatra $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust.

7. Mátrixával adott egy város úthálózatának élsúlyozott, irányított gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi az átlagos idő, ami az út megtételéhez autóval szükséges. A várost egy folyó szeli ketté, a folyón hidak vannak, csak ezeken lehet átkelni a folyó egyik partjáról a másik partra.

Mindegyik híd egyirányú, vagy egy jobbparti csomópontból vezet egy balpartiba vagy fordítva. A hidak egy listában adottak, egy hidat a (v_i, v_j) pár adja meg, ha a híd a v_i csomópontból a v_j csomópontba megy.

Lakásunk, mely az ℓ csomópontban és munkahelyünk, mely az m csomópontban van, a folyó ellentétes oldalán találhatóak, ezért amikor dolgozni megyünk át kell kelniünk az egyik hídon. Van egy kedvenc hídunk, amit használni szeretnénk és szeretnénk meghatározni azt a leggyorsabban megtehető utat, ami ezen a hídon keresztül vezet a lakásunkból a munkahelyünkre úgy, hogy a folyón csak egyszer kelünk át.

Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk találni ezt a legjobb útvonalat (a szokásos módon n a csomópontok számát jelöli)?

8. Adott egy n méretű tömb, aminek az elején néhány (de legalább egy darab) 1-es áll, utána pedig minden elem 2-es (az lehetséges, hogy a tömb csupa 1-es számot tartalmaz). Adjon $O(\log n)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza az utolsó 1-es indexét.

A válaszokat indokolni kell. A feladatokban szereplő tanult algoritmusokat csak annyira kell leírni, amennyire az az indokláshoz szükséges.

1. Az alábbi pszeudokód inputja két tömb:
az n hosszú A tömb egész számokat tartalmaz, a szintén n hosszú B tömb pedig csupa 0-ból áll. Az eljárás outputja az M szám. Mutassa meg, hogy az eljárás lépésszáma $O(n)$.

```
B[0] := A[0]
ciklus i = 1-től (n-1)-ig:
    B[i] := max(A[i], B[i-1] + A[i])
ciklus vége
M := B[0]
ciklus j = 1-től (n-1)-ig:
    ha B[j] > M:
        M := B[j]
ciklus vége
```

2. Tanultunk egy eljárást, amivel DAG-ban meg lehet találni a legrövidebb utak hosszát a kezdőcsúcsból minden más csúcsba. Az algoritmus során a gráf v csúcsaira sorban meghatározzuk a $távolság[v]$ értékeket, a topologikus sorrend szerint haladva. Az eljárás lelkét az alábbi (részben hiányos) képlet alkotja:

$$távolság[v] = \min_{u \rightarrow v} \{ \boxed{} \}$$

Egészítse ki a fenti formulát, magyarázza el a használt jelöléseket is. Mutassa meg, hogy ha minden, a topologikus sorrendben v -t megelőző csúcsra helyes a $távolság$ értéke, akkor a fenti képlet helyesen adja meg a távolságot a v csúcsra.

3. Az alábbi 11 méretű hash táblába nyílt címzéssel, lineáris próbával szúrtunk be néhány egész számot majd egyet közülük kitöröltünk, így az alábbi állapotot kaptuk (* jelöli a törölt cellát, a kitöltetlen cellák mindvégig üresek voltak). A használt hash függvény a $h(K) = K$ maradéka 11-gyel osztva függvény volt.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	4	*	3	15		6	18			22

Ebben a táblázatban egyetlen olyan szám van, amire igaz, hogy ha ezt a számot kitöröljük, majd újra beszúrjuk, akkor a szám egy másik helyre kerül vissza. Melyik ez a szám? Válaszának indoklására mutassa be, hogy hogyan zajlik ennek a számnak a törlése és beszúrása.

4. Egy egyszerű, irányított G gráfon BFS-t (szélességi bejárást) futtattunk az A csúcsból. A csúcsokat A, C, B, D, E, F sorrendben látogattuk meg, a BFS feszítőfa élei AC, AB, CD, BE, BF .

(a) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él E -ből D -be?

(b) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él C -ből E -be?

Válaszait indokolja!

5. Egy bináris keresőfában a 7, 9, 15, 16, 20 számokat tároljuk valamilyen elrendezésben. Rajzolja fel a fát, ha tudjuk, hogy a fát preorder bejárással bejárva a 9, 7, 15, 20, 16 sorrendben látjuk az elemeket. Röviden magyarázza el, hogy miért csak ez lehet a fa alakja.
6. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú, egyszerű, irányított G gráf. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami G mátrixából előállítja annak az irányítatlan G_1 gráfnak a szomszédossági mátrixát, aminek csúcsai megegyeznek G csúcsaival és G_1 -ben pontosan akkor van két csúcs összekötve, ha G -ben valamelyik irányban volt él közöttük.
7. Mátrixával adott egy város úthálózatának élsúlyozott, irányított gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi az átlagos idő, ami az út megtételéhez autóval szükséges. Útfelújítások miatt a következő héten le fogják zárni a város két csomópontját, a -t és b -t (ezeken nem lehet autóval áthaladni). Adott a gráfban két kijelölt csúcs, S és T és azt szeretnénk eldönteni, hogy az a és b csomópontok lezárása miatt növekedni fog-e az S -ből T -be eljutás ideje és ha igen, akkor mennyivel. (Tételezzük fel, hogy a közvetlen utakhoz rendelt átlagos idők nem változnak a lezárások következtében.) Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk oldani ezt a feladatot (a szokásos módon n a csomópontok számát jelöli)?
8. Adott egy n különböző egész számot tartalmazó A tömb, ebben szeretnénk három olyan számot találni, hogy közülük bármely kettő különbsége legfeljebb 2019 legyen. Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú eljárást erre a feladatra.