MINTA 1. szintfelmérő Valószínűségszámítás és statisztikából

Tóbiás András

2023. november 27.

Ezen minta célja a kis zh-ban várható jellegzetes feladattípusok bemutatása. A kis zh-kban ezektől eltérő feladattípusok és valamivel nehezebb feladatok is előfordulhatnak. A mintafeladatok az első két heti előadás és gyakorlat anyagára épülnek, ami nem mindig fedi le az első kis zh anyagát (lásd az aktuális előadás honlapját).

A kis zh-ban a feladatok megoldását nem kell indokolni, de amennyiben valamilyen definíció vagy tétel a kérdés, igyekezzünk azt pontosan megfogalmazni. Minden feladatot a feladatlapot oldjunk meg. A feladatlapot be kell adni. Munkaidő: 15 perc.

Név: ....

Neptun: ....

Neptun szerinti gyakorlatvezető neve: ....

1. Egy IMSc-s gyakorlaton 21 fő vesz részt, de sajnos csak 18 szék van a teremben. Négy hallgató kiszámolta, hogy hányféleképpen lehet kiválasztani azt a 18 hallgatót, akiknek jut ülőhely, és az alábbi eredményeket kapták. Melyik eredmény NEM helyes? (4 pont)

   a) $\binom{21}{3}$ b) $\binom{21}{18}$ c) $\frac{21!}{18!}$ d) $\frac{21!}{6\cdot 18!}$

2. Legyen Ω eseménytér és legyenek $A_1, A_2, A_3, A_4 \subseteq \Omega$ események. Mit jelent az, hogy $A_1, \ldots, A_4$ *teljes eseményrendszert alkotnak*? (3 pont)

3. Az A és B eseményekről tudjuk, hogy függetlenek és pozitív valószínűségűek. Mi következik ebből? (3 pont)

   a) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)$ b) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ c) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B)$ d) $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)$

4. Legyenek A és B olyan események, amelyekre $\mathbb{P}(A|B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$ és $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$. Mennyi $\mathbb{P}(B|A)$? (4 pont)

   a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{3}$

5. Igaz vagy hamis? Karikázzuk be a helyes válasz betűjét!

   (a) Ha A és B független események, akkor $\overline{A}$ és B is független események. I H (2 pont)

   (b) Egy szabályos pénzérmét kétszer feldobva annak a valószínűsége, hogy egy fejet és egy írást dobunk, pontosan ugyanannyi, mint azé, hogy két fejet dobunk. I H (2 pont)

   (c) Ha A és B kizáró események és $\mathbb{P}(A) \neq 0 \neq \mathbb{P}(B)$, akkor $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)$. I H (2 pont)

További jellegzetes feladattípus az 1. kis zh-kra (indoklás nem szükséges, csak a végeredményekre jár pont):

+1. Az A, B, C pozitív valószínűségű eseményekről tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy teljesülnek-e (karikázzuk be a helyes válasz betűjelét)! (2 pont/részfeladat)

1. Az A, B és C események függetlenek.
   a) igen, mindig b) nem, soha c) van rá példa és ellenpélda is
2. Az A és a B események kizáróak.
   a) igen, mindig b) nem, soha c) van rá példa és ellenpélda is
3. A B és a C események teljes eseményrendszert alkotnak.
   a) igen, mindig b) nem, soha c) van rá példa és ellenpélda is
4. $\mathbb{P}(A \cap C) > 0$.
   a) igen, mindig b) nem, soha c) van rá példa és ellenpélda is

+2. Az A és B eseményekről tudjuk, hogy függetlenek és $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(B) = 1/3$. Mennyi a valószínűsége, hogy az A és B események közül pontosan egy következik be? (3 pont)
a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{6}$ f) az előzőek közül egyik sem

+3. Az A és B eseményekről tudjuk, hogy $\mathbb{P}(A \setminus B) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \frac{1}{2}$ és $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Karikázzuk be a helyes válaszokat! (3×3 pont)

Független-e A és B? igen nem

Pozitív-e annak a valószínűsége, hogy A és a B közül egyik sem következik be? igen nem

Teljes eseményrendszert alkotnak-e az $A \setminus B, B \setminus A$ és $A \cap B$ események? igen nem

További jellegzetes feladattípusok a 2. kis zh-kra (indoklás nem szükséges, csak a végeredményekre jár pont):

6. Legyen $X \sim N(0,1)$. A mellékelt normális eloszlás táblázat segítségével határozzuk meg az alábbi valószínűségeket 4 tizedesjegy pontossággal:

a) (2 pont) $\mathbb{P}(X < 0.55) =$......................

b) (2 pont) $\mathbb{P}(X > 1.63) =$......................

c) (3 pont) $\mathbb{P}(X < -0.38) =$......................

7. Legyen $X \sim N(0,1)$. A mellékelt normális eloszlás táblázatban szereplő $0.00, 0.05, \ldots, 3.49$ számok közül határozzuk meg azt az x_1 számot, amelyre $\mathbb{P}(X < x_1)$ a legközelebb van 0.9-hez, illetve azt az x_2 értéket, amelyre $\mathbb{P}(X < -x_2)$ a legközelebb van 0.01-hez. (2+3 pont)

$x_1 =$..................

$x_2 =$..................

8. Legyenek X, Y független indikátorváltozók, amelyekre teljesül, hogy $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{3}$ és $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{4}$. Határozzuk meg $\mathbb{P}(X = Y = 0)$-t! (4 pont)

$\mathbb{P}(X = Y = 0) =$....................

9. Az X és az Y valószínűségi változók együttes eloszlását az alábbi táblázat szemlélteti.

a) Adjuk meg X és Y peremeloszlásának kérdezett adatait! (4×2 pont)

$X \mid Y$	0	2
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$\mathbb{P}(X = 0) =$.....................

$\mathbb{P}(X = 2) =$.....................

$\mathbb{P}(Y = 1) =$.....................

$\mathbb{P}(Y = 3) =$.....................

b) A táblázat alapján adjuk meg $\mathbb{P}(XY = k)$-t minden olyan k-ra, amelyre ez a valószínűség nem 0! (4× 2 pont)

....

....

c) Határozzuk meg $\mathbb{E}[XY]$-t! (4 pont)

$\mathbb{E}[XY]$ =..

10. Pistike és Józsika kapnak nagymamájuktól 7 kocka csokoládét, amit úgy osztanak el egymás között, hogy feldobnak egy szabályos dobókockát, és amennyit az mutat, annyi kocka csokit kap Pistike, a maradék pedig Józsikáé lesz. Jelölje X a Pistike, Y pedig a Józsika által kapott csokoládék számát. Mi teljesül ekkor az X és Y valószínűségi változók korrelációjára? (4 pont)

(a) pozitív

(b) negatív

(c) 0, sőt X és Y függetlenek

(d) 0, de X és Y nem függetlenek

11. Juliska kézilabda-mérkőzésen lép pályára, a kishúga, Mariska pedig édesapjukkal nézi a lelátóról. Juliska csapata 40% valószínűséggel nyeri meg a mérkőzést, 20% valószínűséggel pedig döntetlent játszik (különben veszít). Ha a csapat nyer, akkor Juliska édesapja vesz 2 gombóc fagyit Juliskának, ha döntetlent játszik, akkor 1 gombóc fagyit, ha pedig veszít, akkor egyet sem. Ha Juliskának vesz (akár 1, akár 2 gombóc) fagyit, akkor Mariskának is vesz pontosan 1 gombóc fagyit. Jelölje X a Juliska, Y pedig a Mariska által kapott fagyigombócok számát. Mi teljesül ekkor az X és Y valószínűségi változók kovarianciájára? (4 pont)

(a) pozitív

(b) negatív

(c) 0, sőt X és Y függetlenek

(d) 0, de X és Y nem függetlenek

(*Segítség a 10., 11. és hasonló feladatokhoz: Mivel indoklást nem kérünk, a lehetséges válaszok alapján a korreláció/kovariancia numerikus értékét nem fontos meghatározni. Az előjele pedig a feladat leírása alapján, számolás nélkül is meghatározható – hogyan?*)

12. A 11. feladatban szereplő X valószínűségi változóra adjuk meg $\mathbb{E}[X^2]$-et. (4 pont) $\mathbb{E}[X^2]$ = ...

13. A 11. feladatban szereplő X, Y valószínűségi változókra adjuk meg $\mathbb{P}(X^Y = k)$-t minden olyan k-ra, amelyre ez a valószínűség nem 0. Ehhez a $0^0 = 1$ konvenciót használjuk. (4+2 pont)

....,..

....,...

Ez alapján határozzuk meg $\mathbb{E}[X^Y]$-t. (4 pont) $\mathbb{E}[X^Y]$ = ...

14. Az X valószínűségi változóra teljesül, hogy $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = -0) = 1/5$ és $\mathbb{P}(X = 1) = 3/5$. Határozzuk meg az alábbi mennyiségeket. (Indokolni nem kell, de részben hibás megoldás esetén a korábbi részfeladatok eredményei alapján részpontszámok kaphatók, például ha $\mathbb{E}(X)$ hibás, de $\mathbb{E}(5 - 5X)$ az $\mathbb{E}(X)$ hibásan megadott értékét figyelembe véve teljesíti a várható érték azonosságait.)

$\mathbb{E}(X)$=.............................. (3 pont)

$\mathbb{E}(5-5X)$=.............................. (2 pont)

$\mathbb{D}^2(X)$=............................... (3 pont)

$\mathbb{D}^2(10-5X)$=........................... (3 pont).

15. Az X valószínűségi változó binomiális eloszlású $\mathbb{E}(X)=18$ várható értékkel.

Határozzuk meg $\mathbb{E}(2X+4)$-et. .... (2 pont)

16. Az X valószínűségi változó geometriai eloszlású $\mathbb{D}^2(X)=2$ szórásnégyzettel.

Határozzuk meg $\mathbb{D}^2(3-2X)$-et. .... (3 pont)

17. Egy X diszkrét valószínűségi változóról tudjuk, hogy az értékkészlete a pozitív egész számok halmaza. Milyen eloszlású lehet X az alábbiak közül? (2 pont)

(a) binomiális

(b) geometriai

(c) Poisson

(d) diszkrét egyenletes

18. Egy X folytonos valószínűségi változóról tudjuk, hogy sűrűségfüggvénye egész $\mathbb{R}$-en mindenütt pozitív. Milyen eloszlású lehet X az alábbiak közül? (2 pont)

(a) normális

(b) egyenletes

(c) exponenciális

(d) két független exponenciális összegével megegyező eloszlású

19. Egy X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x)=\begin{cases} cx, & \text{ha } x\in(0,1) \\ 0, & \text{különben} \end{cases},$$

Határozzuk meg c értékét. (3 pont)

(a) 0.5

(b) 1

(c) 2

(d) az előzőek közül egyik sem

20. Egy X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{ha } x \in (0,1)\ , \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Határozzuk meg $\mathbb{E}(X)$-et. (3 pont)

(a) 2/3

(b) 3/4

(c) 1

(d) az előzőek közül egyik sem

21. Egy X folytonos valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x/3, & \text{ha } x \in (1,2)\ , \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét. (5 pont, az esetszétválasztás részeire külön-külön is kaphatók pontok)

$$F_X(x) = \begin{cases} & \\ & \\ & \end{cases}$$

22. Egy X folytonos valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0, \\ x^2, & \text{ha } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{ha } x > 1. \end{cases}$$

Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét (úgy, hogy az egy nyílt intervallumon legyen 0-tól különböző). (5 pont, az esetszétválasztás részeire külön-külön is kaphatók pontok)

$$f_X(x) = \begin{cases} & \\ & \\ & \end{cases}$$

23. Tetszőleges X, Y valószínűségi változókra, amelyekre $\mathbb{E}(X^2) < \infty$ és $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$, $\mathrm{cov}(42X, Y+8)$ a következő képlettel adható meg:

$$\mathrm{cov}(42X - 2, -2Y + 8) = a \cdot \mathrm{cov}(X, Y) + b,$$

ahol $a =$ .... (3 pont) és $b =$ .... (2 pont).

24. Tetszőleges X, Y, Z valószínűségi változókra, amelyekre $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$ és $\mathbb{E}(Z^2) < \infty$, $\mathrm{cov}(42X + Y, Z + 1)$ a következő képlettel adható meg:

$$\mathrm{cov}(42X + Y, Z + 1) = a \cdot \mathrm{cov}(X, Z) + b \cdot \mathrm{cov}(Y, Z) + c,$$

ahol $a =$ .... (3 pont), $b =$ .... (2 pont) és $c =$ .... (2 pont).

További jellegzetes feladattípusok a 3. kis zh-kra (indoklás nem szükséges, csak a végeredményekre jár pont):

25. Az $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ valószínűségi vektorváltozó kétdimenziós normális eloszlású $\underline{m} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ és $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ paraméterekkel. Határozzuk meg az alábbi mennyiségeket (4×2 pont):

$\mathbb{E}[X] =$...................... $\mathbb{D}^2[Y] =$...................... $\mathbb{D}[X] =$.......................... $\mathrm{cov}(X, Y) =$.......................

Független-e X és Y? Karikázzuk be a helyes választ (2 pont): igen nem

26. Tegyük fel, hogy az X, Y valószínűségi változók függetlenek, továbbá $\mathbb{E}(X) = 4$, $\mathbb{E}(X^2) = 18$, $\mathbb{E}(Y) = 3$ és $\mathbb{E}(Y^2) = 10$. Ekkor $\mathbb{E}(X^2 - 2X + Y|Y)$=? (4 pont)

a) 13

b) $X^2 - 2X + 3$

c) $X^2 - 2X + Y$

d) $10 + Y$

Határozzuk meg továbbá $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X^2 - 2X + Y|Y))$ értékét. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X^2 - 2X + Y|Y)) =$ .... (3 pont)

27. Az X, Y valószínűségi változókról tudjuk, hogy X ismeretében Y egyenletes eloszlású az $[X - 2, X + 4]$ intervallumon. Ekkor $\mathbb{E}[Y|X]$ értéke (3 pont)

a) 1

b) X

c) $X + 1$

d) $X + 2$

d) ezekből az adatokból nem határozható meg

28. Az Y valószínűségi változó értékét úgy kapjuk, hogy először feldobunk egy szabályos dobókockát, majd egy szabályos pénzérmét is, és ha az érme fejet mutat, akkor Y-t a kockadobás eredményeként, ha pedig írást, akkor a kockadobás eredményénél 1-gyel nagyobb számként definiáljuk. $\mathbb{E}(Y)$ =? (4 pont)

a) 3,5

b) 4

c) 4,5

d) 5

29. Tekintsük a 4 db független kockadobás eredményeként kapott 4 elemű $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ minta $\mathbf{x} = (4, 6, 2, 3)$ realizációját! Adjuk meg az alábbi mennyiségeket:

A realizáció empirikus mediánja a $\mathbf{x}$ realizáció esetén (4 pont): ....

Az X_4^* rendezett mintaelem x_4^* értéke az $\mathbf{x}$ realizáció esetén (3 pont): ....

30. Tekintsük egy fae. indikátorváltozókból álló 3 elemű $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3\}$ minta $\mathbf{x} = \{0, 1, 0\}$ realizációját. Adjuk meg a balról folytonos F_3^* empirikus eloszlásfüggvény értékét ezen realizációra vonatkozóan a $0, 1/2, 1, 2$ helyeken (4×2 pont)!

$F_n^*(0) =$................................

$F_n^*(1/2) =$............................

$F_n^*(1) =$................................

$F_n^*(2) =$................................

31. Egy 3 elemű fae. minta realizációja $\mathbf{x} = (1, 2, 0)$. Határozzuk meg a minta empirikus szórásnégyzetét ezen realizáció esetén (4 pont)! Segítség: $s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{x_n}^2$, $(s_n^*)^2 = \frac{n}{n-1}s_n^2$.

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) 4

32. Ha $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_4)$ egy 4 elemű Poisson-eloszlású $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_4)$ fae. minta realizációja ismeretlen $\vartheta > 0$ paraméterrel, azaz

$$\mathbb{P}_\vartheta(X_i = k) = \frac{\vartheta^k}{k!}\mathrm{e}^{-\vartheta},$$

akkor a likelihood-függvény ehhez a realizációhoz tartozó értéke (4 pont)

a) $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_4) = \frac{\vartheta^{\sum_{i=1}^4 x_i}}{4!}\mathrm{e}^{-4\vartheta}$ b) $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_4) = \frac{\vartheta^{\sum_{i=1}^4 x_i}}{\prod_{i=1}^4 x_i!}\mathrm{e}^{-4\vartheta}$

c) $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_4) = \prod_{i=1}^4 \left(\frac{\vartheta^{x_i}}{4!}\mathrm{e}^{-\vartheta}\right)$ d) $L_\vartheta(x_1, \ldots, x_4) = -4\vartheta + \sum_{i=1}^4 \left(x_i \ln\vartheta - \ln(x_i!)\right)$

33. Ha X binomiális eloszlású, ahol a kísérletek száma, n ismert és az egyes kísérletek sikerének valószínűsége, $\vartheta \in (0, 1)$ ismeretlen, akkor az ehhez tartozó p_ϑ súlyfüggvény értéke $x \in \{0, \ldots, n\}$ helyen (4 pont)

a) $p_\vartheta(x) = \binom{n}{x}\vartheta^x(1-\vartheta)^{n-x}$ b) $p_\vartheta(x) = \binom{\vartheta}{x}n^k(1-n)^{\vartheta-k}$

c) $p_\vartheta(x) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$ d) $p_\vartheta(x) = \ln\binom{n}{x} + x\ln\vartheta + (n-x)\ln(1-\vartheta)$.

34. Ha $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_4)$ egy 4 elemű exponenciális eloszlású $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_4)$ fae. minta realizációja ismeretlen $\vartheta > 0$ paraméterrel, azaz

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} \vartheta\mathrm{e}^{-\vartheta x}, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

akkor a log-likelihood-függvény ehhez a realizációhoz tartozó értéke (4 pont)

a) $l_\vartheta(x_1, \ldots, x_4) = \sum_{i=1}^4 x_i \ln\vartheta - 4\vartheta$ b) $l_\vartheta(x_1, \ldots, x_4) = \prod_{i=1}^4 \left(\vartheta\mathrm{e}^{-\vartheta x_i}\right)$

c) $l_\vartheta(x_1, \ldots, x_4) = \vartheta^4\mathrm{e}^{-\vartheta\sum_{i=1}^4 x_i}$ d) $l_\vartheta(x_1, \ldots, x_4) = 4\ln\vartheta - \vartheta\sum_{i=1}^4 x_i$

35. A szomszédom és én is sok tyúkot tartunk. Nézeteltérésünk támadt abban az ügyben, hogy a tyúkjaink átlagos testmagassága megegyezik-e. Milyen statisztikai próbát alkalmazzunk a vita eldöntésére, ha mindketten egyetértünk abban, hogy az egyes tyúkok testmagasságai független, normális eloszlású, 2 cm szórású valószínűségi változókkal modellezhetők? (3 pont)

(a) kétoldali, kétmintás u-próbát

(b) egyoldali, kétmintás u-próbát

(c) kétoldali, kétmintás t-próbát

(d) egyoldali, kétmintás t-próbát

36. Egy műszaki boltban rendszeresen vásárolok két-két méter optikai kábelt, amelynek hosszúsága hozzávetőleg normális eloszlású 1 cm szórással. Arra gyanakszom, hogy a kábel hosszúságának méterben mért μ várható értéke valamivel elmarad a 2-től. Milyen nullhipotézis–ellenhipotézis párt válasszak, hogy az előadáson tanult u-próba megfelelő variánsa segítségével megvizsgálhassam, hogy igaz-e a gyanúm? (4 pont)

(a) $H_0 : \mu = 2$ vs. $H_1 : \mu \neq 2$

(b) $H_0 : \mu \leq 2$ vs. $H_1 : \mu > 2$

(c) $H_0 : \mu < 2$ vs. $H_1 : \mu \geq 2$

(d) $H_0 : \mu \geq 2$ vs. $H_1 : \mu < 2$

(e) $H_0 : \mu > 2$ vs. $H_1 : \mu \leq 2$

37. Egy adatsorban 35 darab független, $N(\mu; \sigma^2)$ eloszlású valószínűségi változó numerikus értéke szerepel, ahol a $\mu \in \mathbb{R}$ és $\sigma > 0$ paraméterek ismeretlenek. Milyen szabadságfokú t-eloszlást kell használnunk, ha t-próbával szeretnénk eldönteni, hogy $\mu = 42$ teljesül-e? (3 pont)

(a) 34

(b) 35

(c) 41

(d) 42

(e) 75

Természetesen mindegyik kis zh-n lehetnek olyan típusú feladatok is, amilyenek ebben a mintafeladatsorban valamelyik másik kis zh-nál szerepelnek. Érdemes például a definíciókra, tételekre rákérdező feladatokra mindhárom kis zh esetén számítani. Az itt felsoroltaktól különböző típusú feladatok kitűzésének jogát fenntartjuk. A kis zh-k anyaga változhat az itteni feladatok felosztásához képest, lásd az aktuális tárgyhonlapot.