11. Gyakorlat
Feltételes várható érték, Teljes várható érték tétele

1. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x;y) \mapsto \begin{cases} \frac{12}{5}(x^2 - xy + y^2) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Adjuk meg az
a) $f_{Y|X}(y \mid x)$ sűrűségfüggvényt, b) $\mathbb{E}(Y \mid X)$ feltételes várható értéket,
c) (X, Y) kovarianciamátrixát és d) Y-nak X-re vonatkozó lineáris regresszióját.

2. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x;y) \mapsto \begin{cases} \frac{4}{5}(x + y + xy) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Adjuk meg az $\mathbb{E}(X \mid Y)$ regressziót.

3. Legyenek $X \sim N(0;1)$, $Y \sim \text{Exp}(2)$ független valószínűségi változók. Számoljuk ki az alábbiakat:
a) $\mathbb{E}(3X - Y + 1 \mid X)$ b) $\mathbb{E}\left((2XY)^2 - 7Y \mid X\right)$
c) $\mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2 \mid X + Y)$ d) $\mathbb{E}\left(X^2\text{tg}(Y) + \frac{5X}{Y} - 2Y \mid Y\right)$

4. Háromszor dobunk egy szabályos kockával. Jelölje X a legkisebb, Y pedig a legnagyobb értéket. Adjuk meg az $\mathbb{E}(X \mid Y = 3)$ feltételes várható értéket.

5. Négyszer dobunk egy szabályos érmével. Jelölje Y az összes fejdobás számát, A pedig azt, hogy a második dobás lesz először fej. Adjuk meg az $\mathbb{E}(Y \mid A)$ feltételes várható értéket.

6. Egy szabályos kockával n-szer dobunk. Jelölje X a hatos, Y pedig a páros dobások számát. Számoljuk ki az $\mathbb{E}(Y \mid X)$ regressziót.

---

7. Egy érme p valószínűséggel landol a fej oldalán, ahol p egyenletesen helyezkedhet el az $(\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$ intervallumon. Várhatóan hány dobásra lesz szükség ezzel az érmével, ha az első fejig folytatjuk az érmedobás kísérletet.

8. Legyen $X \sim \text{Exp}(4)$ valószínűségi változó. Az X kiértékelése után választunk egy Y számot a $(0; X)$ intervallumon egyenletesen. $\mathbb{E}(Y) =?$

9. Egy iratot keresünk, ami az íróasztalunk két fiókjának valamelyikében van, $\frac{2}{3}$ eséllyel a felső fiókban, egyébként az alsóban. A felső fiók átnézése 7 percig tart, az alsó fióké 3 percig. Tegyük fel, hogy az iratot csak az őt tartalmazó fiók teljes átnézése után találjuk meg. Várhatóan mennyi időbe telik megtalálni az iratot, ha az átnézést
a) a felső fiókkal, b) az alsó fiókkal kezdjük?

10. Egy bányában eltévedt egy ember, aki egy csomópontban áll, ahonnan három irányba mehet tovább. Az első irányt választva kijut a bányából egy óra alatt, a második irányt választva visszaérkezik ugyanide 2 óra alatt, a harmadik irányt választva pedig 3 óra alatt ér vissza ugyanide. Feltéve, hogy minden esetben, amikor választania kell, akkor egyenlő valószínűséggel választja bármelyik opciót, várhatóan mennyi idő múlva jut ki a bányából?

IMSc 10. Legyenek $X, Y \sim N(0;1)$ független valószínűségi változók, $V = 3X + 2Y$ és $W = 2X - Y$. Adjuk meg az $\mathbb{E}(V|W)$ feltételes várható értéket.