Bevezetés a számításelméletbe II.
1. pótzárthelyi — pontozási útmutató
2014. december 12.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. A tíz csúcsú G egyszerű gráfban hat darab 6 fokú, két darab 3 fokú és két darab 1 fokú csúcs van. Mutassuk meg, hogy hozzá tudunk adni a gráfhoz pontosan két élet úgy, hogy a gráfnak legyen Euler-körsétája.

* * * * *

Ahhoz, hogy a gráfnak legyen Euler-körsétája szükséges, hogy minden fok páros legyen. Ez elérhető, ha a két élet két-két páratlan fokú csúcs közé húzzuk be. (2 pont)
Szükséges még (és az előző feltétellel együtt elégséges is), hogy a kapott gráf öszefüggő legyen. A 6 fokú csúcsok G-nek ugyanabban a C komponensében vannak, (1 pont)
hiszen egyszerű gráfban 6 fokú csúcs csak 7 vagy több csúcsú komponensben lehet, (1 pont)
ilyenből pedig nem lehet két különböző G-ben (hiszen G-nek csak 10 csúcsa van). (1 pont)
C-ben tehát legalább 7 csúcs van, így a páratlan fokúakból is tartalmaz csúcsot, (1 pont)
mégpedig páros számút, ellenkező esetben a komponens fokszámösszege páratlan lenne, ami lehetetlen. (1 pont)
Két eset lesz: vagy minden csúcs C-ben van vagy 8 csúcs van C-ben és a maradék kettő egy másik komponensben (könnyen látható, hogy ez esetben ez a kettő 1 fokú lesz). (1 pont)
Az első esetben kész vagyunk, hiszen már maga G is összefüggő, (1 pont)
a második esetben pedig a két élet úgy kell behúznunk, hogy a két C-n kívüli csúcsot kössék össze a két C-beli ponttal, a kapott gráf ekkor összefüggő lesz. (1 pont)

2. Egy húsz csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka kilenc. Mutassuk meg, hogy legfeljebb két él hozzávételével elérhető, hogy a gráfnak legyen Hamilton-köre.

* * * * *

Vegyünk hozzá a gráfhoz két új csúcsot, amiket kössünk össze az eredeti gráf minden csúcsával. (3 pont)
A kapott gráf egyszerű, (1 pont)

és minden foka legalább 11. (1 pont)
Mivel 22 csúcsa van, a Dirac-tétel szerint így lesz Hamilton-köre. (2 pont)
A két újonnan bevett csúcsot elhagyva az eredeti gráf két ((a, b), illetve (c, d)) diszjunkt útját kapjuk, melyek együtt minden csúcsot tartalmaznak. (2 pont)
Ha nem szerepelnek a gráfban, vegyük be az (a, c) és (b, d) éleket, a két út ezekkel együtt Hamilton-kört alkot. (1 pont)

3. Határozzuk meg annak a gráfnak az élkromatikus számát, melyet úgy kapunk, hogy egy öt csúcsú teljes gráf minden élét megduplázzuk.

* * * * *

Az élkromatikus szám 10 lesz. Jó élszínezésért 10 színnel 4 pont jár. Lehet természetesen a Vizing tételt is használni, de nem a feladatbeli gráfra (hiszen az nem egyszerű), hanem K_5-re, ami viszont az: (1 pont)
a tétel szerint K_5 5-élszínezhető, (1 pont)
a dupla K_5 tehát 10-élszínezhető. (2 pont)
A 10-es alsó becsléshez figyeljük meg, hogy minden színosztály párosítást alkot, (2 pont)
így a mérete legfeljebb 2, (1 pont)
hiszen 3 élű párosításhoz 6 csúcsra lenne szükség. (1 pont)
A 20 él színezéséhez tehát 9 szín nem lehet elég, hiszen ennyivel legfeljebb $9 \cdot 2 = 18$ élet lehet jól megszínezni. (2 pont)

4. Legyen G és H két gráf ugyanazon a V csúcshalmazon, J pedig az a gráf, melynek csúcshalmaza szintén V, élhalmaza pedig G és H élhalmazainak uniója. Mutassuk meg, hogy $\chi(J) \leq \chi(G)+\tau(H)$. (Ahol $\tau(H)$ a H gráf minimális lefogó csúcshalmazának mérete.)

* * * * *

J-t megkaphatjuk úgy, ha a G gráfhoz hozzáadjuk a H éleit. (1 pont)
Színezzük ki G-t $\chi(G)$ színnel (1 pont)
és válasszuk ki egy $\tau(H)$ elemű X lefogó csúcshalmazát H-nak. (1 pont)
Az X-beli csúcsokat színezzük át úgy, hogy minden csúcs kapjon egy saját, eddig még nem használt színt. (Ezeket a színeket tehát csak egyszer használjuk, így $\tau(H)$ ilyenre lesz szükségünk). (3 pont)
Az így kapott színezés $\chi(G) + \tau(H)$ színt használ és jó színezése lesz J-nek, (1 pont)
mivel ha két csúcsot G-beli él köt össze, akkor vagy két különböző színük van az első $\chi(G)$ szín közül, (1 pont)
vagy legalább az egyik csúcs olyan színt kapott, amit semelyik másik csúcsnál nem használunk. (1 pont)
Ha két csúcsot H-beli él köt össze, akkor pedig csak az utóbbi eset fordulhat elő, hiszen X lefogó ponthalmaza H-nak. (1 pont)

5. Egy 31 csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka legfeljebb 5. Mutassuk meg, hogy a gráfban létezik 6 csúcsú független ponthalmaz.

* * * * *

Ismert, hogy minden G gráf színezhető (mohón) $\Delta(G) + 1$ színnel. (2 pont)
Ez esetünkben 6-színezést jelent, vizsgáljuk egy ilyen színezés színosztályait. (2 pont)
Nem lehet minden színosztály legfeljebb 5 csúcsú, hiszen ekkor összesen legfeljebb 30 csúcsunk lenne, (4 pont)

létezik tehát legalább 6 csúcsú színosztály, ennek a csúcsai pedig független halmazt alkotnak, hiszen mindnyájan ugyanazzal a színnel vannak színezve. (2 pont)

Második megoldás. Megkeresünk egy 6 csúcsú független halmazt. Válasszunk egy tetszőleges csúcsot, legyen ez az első eleme a halmazunknak. (1 pont)
Mivel legfeljebb 5 szomszédja van, van 25 csúcsunk, ami nem a szomszédja, legyen ezek közül egy tetszőleges a második csúcsunk. (3 pont)
Mivel ennek is legfeljebb 5 szomszédja van, lesz 19 csúcsunk, ami nem szomszédja sem az elsőnek sem a másodiknak, válasszunk ebből tetszőlegesen egy harmadikat. (2 pont)
Az eljárást folytatva minden lépésben 6 csúccsal kevesebből választhatunk, (2 pont)
a hatodik lépésben tehát még biztosan lesz választható csúcs. (2 pont)

6. Egy hálózatban minden vágás kapacitása egész szám. Döntsük el (és indokoljuk is meg), hogy az alábbi állítások közül melyek azok, amelyek mindig teljesülnek.

(a) Minden maximális folyam értéke egész.

(b) Minden él kapacitása egész.

* * * * *

a) Mivel a maximális folyam értéke a Ford-Fulkerson tétel szerint azonos a minimális vágás kapacitásával, (2 pont)
ez utóbbi pedig a feltétel szerint egész, az állítás mindig teljesül. (2 pont)
b) Ez az állítás nem igaz. Tartalmazza a hálózatunk az s és t csúcsokon kívül az a, b csúcsokat és az $(s, a), (s, b), (a, t), (b, t)$ irányított éleket. (1 pont)
Legyen minden él kapacitása $\frac{1}{2}$. (1 pont)
Ahhoz, hogy kiderüljön, hogy valóban minden vágás egész, négy vágást kell ellenőrizni, darabjáért adjunk 1 pontot.