Bevezetés a számításelméletbe II.
1. zárthelyi — pontozási útmutató
2014. október 27.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Adjunk meg egy olyan húsz csúcsú egyszerű G gráfot, melyben hat darab ötfokú és tizennégy darab hatfokú csúcs van, és hatnál kevesebb él hozzáadásával G-ből nem kaphatunk olyan egyszerű gráfot, melyben van Euler-körséta. (A szóban forgó tulajdonság meglétét természetesen igazoljuk is.)

* * * * *

Élek hozzáadásával kell elérnünk, hogy minden fok páros legyen, így minden ötfokú csúcsra kell új élnek illeszkednie. (2 pont)
Ha ezen csúcsok közt már minden él be van húzva, akkor mindegyikükre külön élnek kell illeszkednie, ellenkező esetben a gráf nem maradna egyszerű. (2 pont)
Ez elérhető, ha a hat ötfokú csúcs egy K_6 részgráfot alkot, (2 pont)
ami a gráf egyik komponense lesz. (1 pont)
A többi csúcsok által feszített részgráf ekkor egy 14 csúcsú, 6-reguláris gráf kell legyen, (1 pont)
ezt megvalósíthatjuk pl. két diszjunkt K_7 részgráffal. (2 pont)

Természetesen más jó megoldás is van és az érvelésnek sem muszáj pontosan ilyennek lennie. A fenti gondolatokért azonban akkor is megadhatjuk a részpontokat, ha a hallgató végül is nem ad meg (jó) gráfot. Jó gráf megadása ugyanakkor indoklás nélkül nem ér pontot.

2. Egy húsz csúcsú egyszerű gráfban minden csúcs foka kilenc. Mutassuk meg, hogy legfeljebb 10 él hozzávételével elérhető, hogy a gráfnak legyen Hamilton-köre.

* * * * *

Ha 10 él hozzáadásával sikerülne elérni, hogy minden fok legalább 10 legyen (1 pont)
úgy, hogy közben a gráf egyszerű marad, (1 pont)
akkor a Dirac-tétel szerint a kapott gráfban lenne Hamilton-kör. (1 pont)
Ahhoz, hogy a gráf egyszerű maradjon, olyan éleket kell bevennünk, amik a gráf komplementerében

szerepelnek, (2 pont)
ahhoz pedig, hogy minden csúcs foka eggyel nőjön, épp egy teljes párosításra van szükségünk. (1 pont)
Azt kéne tehát belátnunk, hogy a gráf komplementerében van teljes párosítás. (1 pont)
A komplementer 20 csúcsú egyszerű gráf, amelyben minden csúcs foka 10, (1 pont)
így a Dirac-tétel szerint van benne Hamilton-kör. (1 pont)
Ennek minden második élét véve teljes párosítást kapunk, ezzel az állítást beláttuk. (1 pont)

Megjegyzés. Valójában már két alkalmas él hozzávételével is elérhető, hogy a gráfnak legyen Hamilton-köre.

3. Határozzuk meg a tripla ötszög (vagyis azon gráf, melyet úgy kapunk, hogy egy öt hosszú kör minden élét három párhuzamos éllel helyettesítjük) élkromatikus számát.

* * * * *

Az élkromatikus szám 8 lesz. Jó élszínezésért 8 színnel 5 pont jár.
Minden színosztály párosítást alkot, (1 pont)
így a mérete legfeljebb 2, (1 pont)
hiszen 3 élű párosításhoz 6 csúcsra lenne szükség. (1 pont)
A 15 él színezéséhez tehát 7 szín nem lehet elég, hiszen ennyivel legfeljebb $7 \cdot 2 = 14$ élet lehet jól megszínezni. (2 pont)

A hatos alsó és kilences felső becslésért (ha mindkettő megvan és meg is vannak indokolva) adhatunk 1 pontot annak ellenére, hogy a megoldáshoz nem visznek közelebb. Egy esetleges hetes alsó becslésért (kellően indokolva) önmagában is adhatunk 2 pontot. A Vizing-tétel használatáért (mivel az csak egyszerű gráfra működik) nem jár pont.

4. Egy G gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 100$ számok, két különböző számot összekötünk, ha a szorzatuk osztható tízzel. Határozzuk meg G kromatikus számát.

* * * * *

A tízzel osztható számok mindenkivel össze vannak kötve, a párosak pedig össze vannak kötve az öttel oszthatókkal, (1 pont)
így a tízzel oszthatók, a 2 és az 5 klikket alkotnak, melynek mérete 12. (2 pont)
A kromatikus szám tehát legalább 12. (1 pont)
12 színnel jól meg is lehet színezni a gráfot: a 10-zel osztható számok kapják az $1, 2, \dots, 10$ színeket, a páratlan, öttel osztható számok a 11-es színt, az összes többi szám pedig a 12-est. (3 pont)
Ez a színezés tényleg jó, hiszen azonos színű csúcsok közt nem megy él: az $1, 2, \dots, 10$ színek esetében ez nyilvánvaló (hiszen ezeket a színeket csak egy-egy csúcs kapta), a 11 színű számok szorzata páratlan (így nem osztható tízzel), a 12 színű csúcsok szorzata pedig nem osztható öttel (így tízzel sem). (2 pont)
A kromatikus szám ezek alapján tehát 12. (1 pont)

5. Egy páros gráf két pontosztálya $A = \{a_1, a_2, \dots, a_9\}$ és $B = \{b_1, b_2, \dots, b_8\}$. Az a_i és b_j csúcsok közt pontosan akkor van él, ha az alábbi táblázat i. sorának j. eleme 1. Döntsük el, hogy van-e

G-ben B-t fedő párosítás.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A mátrixból látható, hogy a b_2, b_3, b_6, b_7 csúcsok minden szomszédja az a_1, a_4, a_8 csúcsok közül kerül ki, azaz $N(\{b_2, b_3, b_6, b_7\}) \subseteq \{a_1, a_4, a_8\}$. (5 pont)
Így nem létezhet a gráfban B-t fedő párosítás, hiszen a felsorolt 4 csúcs mindegyike nem kaphat párt a 3 rendelkezésre álló lehetőségből. (5 pont)

Megjegyzés. Természetesen lehet a Hall-tétellel is érvelni, de itt csak a könnyen belátható irányra van szükség. Jó megoldás az is, ha futtatjuk (és dokumentáljuk) a javítóutas algoritmust és az nem talál B-t fedő párosítást és persze az is, ha megadunk egy 7 csúcsú lefogó ponthalmazt (pl. $a_1, a_4, a_8, b_1, b_4, b_5, b_8$) és a Kőnig-tételt használjuk.

6. Egy hálózatban minden él kapacitása hárommal osztható egész szám. Döntsük el (és indokoljuk is meg), hogy az alábbi állítások közül melyek azok, amelyek mindig teljesülnek.

(a) Minden vágás kapacitása osztható hárommal.

(b) Minden folyam értéke osztható hárommal.

(c) Minden maximális folyam értéke osztható hárommal.

(d) Minden maximális folyam minden élén a folyamérték osztható hárommal.

* * * * *

a) Mivel minden vágás kapacitása bizonyos élek kapacitásainak összege és hárommal osztható számok összege is osztható hárommal, ez az álítás mindig teljesül. (1 pont)
b) Ha például minden kapacitás 3 és van $s - t$ irányított út, akkor annak a mentén minden élen 1-es, minden más élen 0-s értéket megadva nyilván folyamot kapunk, aminek értéke 1, ez az állítás tehát nem feltétlen teljesül. (2 pont)
c) Mivel a maximális folyam értéke a Ford-Fulkerson tétel szerint azonos a minimális vágás kapacitásával, (1 pont)
ez utóbbi pedig (mint láttuk) osztható hárommal, ez az állítás mindig teljesül. (2 pont)
d) Tartalmazza a hálózatunk az s és t csúcsokon kívül az a, b, c csúcsokat és az $(s, a), (s, b), (a, c)(b, c), (c, t)$ irányított éleket. (1 pont)
Legyen minden él kapacitása 3. Könnyen látható, hogy a maximális folyam értéke ebben a hálózatban 3 lesz (1 pont)
és az is, hogy az élekhez a felsorolásuk sorrendjében az 1,2,1,2,3 értékeket rendelve folyamot kapunk, amely maximális, ennek ellenére nem minden élen lesz a folyamérték hárommal osztható, az állítás tehát nem mindig teljesül. (2 pont)