Bevezetés a számításelméletbe I. feladatgyűjtemény

Szeszlér Dávid, Wiener Gábor

Tartalomjegyzék

Előszó

A feladatgyűjtemény a BME VIK mérnök-informatikus szakának Bevezetés a Számításelméletbe I. tárgyához készült, de hasznos lehet bárkinek, aki bevezető szinten foglalkozik lineáris algebrával, térbeli koordinátageometriával vagy komplex számokkal. A gyűjtemény elsődleges célja a zárthelyire való felkészülés megkönnyítése, ennek megfelelően nem helyettesíti a gyakorlatok feladatsorait (melyek nagyrészt könnyebb feladatokat tartalmaznak) és különösen nem helyettesíti a gyakorlatokon való (aktív) részvételt. Nem közlünk definíciókat, tételeket, algoritmusokat; ezek megtalálhatók az ajánlott jegyzetekben (melyek közül Freud Róbert: Lineáris algebra című egyetemi jegyzetét emelnénk ki). A feladatgyűjtemény jelen formájában nem tartalmaz számosságokkal és gráfokkal kapcsolatos feladatokat, mivel ezek a témakörök rendszerint a zárthelyik után szerepelnek az anyagban (a gráfelmélethez ráadásul rendelkezésre áll egy kitűnő feladatgyűjtemény: Friedl-Recski-Simonyi: Gráfelméleti feladatok, Typotex, 2006.).

A felkészülés során célszerű az egyes feladatokat önállóan megoldani, feladatonként szükség esetén körülbelül 15 percet eltöltve (ennyi áll rendelkezésre átlagosan egy feladatra a zárthelyin), majd az eredményt ellenőrizni. A feladatok többségére részletes megoldást adunk (sokszor kettőt, akár hármat is), ahol megoldást nem közlünk, ott többnyire megadjuk az eredményt (ha van). Természetesen a közölt megoldástól eltérő gondolatmenet is lehet helyes. Nem célszerű a feladat szövege után azonnal elolvasni a megoldást, még akkor sem, ha idő hiányában ez tűnik jó felkészülési stratégiának; a feladaton való gondolkodás még akkor is segít megérteni a megoldást, ha önállóan még részeredményt sem sikerül elérni. A gyűjteményben szereplő feladatokat nem érdemes típuspéldáknak tekinteni és arra számítani, hogy a tényleges zh-ban is ugyanilyenek fognak szerepelni, esetleg más számokkal (bár ez természetesen nrm kizárt), ennél semmi sem áll távolabb a szerzők szándékaitól.

Számos feladathoz szerepel egymondatos segítség, ezt akkor érdemes igénybe venni, ha valakinek nincs elképzelése arról, hogy hogyan is kéne elindulnia. A segítségek és a megoldások megtalálását megkönnyítendő, a feladatok (és így persze a segítségek és megoldások is) nem fejezetenként, hanem folytonosan vannak számozva.

A gyűjtemény túlnyomórészt az elmúlt évek zárthelyi feladaiból áll, de szerepelnek benne egyéb feladatok is (például olyanok, amik nehézségük folytán nem kerültek be egyik zárthelyibe sem).

A feladatokat nehézségük szerint öt csoportba soroltuk. A legtöbb feladat a 2-es nehézségi fokozatba tartozik, ez az átlagos zh-példának felel meg, a többi szint jelentése: 0: zh-példának túl egyszerű; 1: könnyű zh-példa; 3: nehéz zh-példa; 4: zh-példának túl bonyolult. A besorolásnál a javítás tapasztalatait is figyelembe tudtuk venni, ezért úgy véljük, hogy a nehézségi szintek nagyjából helytállók. Számos olyan feladat van, melyet az 1-es és 2-es, illetve a 2-es és 3-as szint közöttinek éreztünk, de újabb kategóriák bevezetése fölöslegesnek tűnt. Minden feladat mellett megtalálható a nehézségi fokozata és az, hogy van-e hozzá segítség, illetve megoldás. S betűvel jeleztük, ha a feladathoz rendelkezésre áll segítség, M betűvel, ha megoldás, E betűvel pedig, ha részletes megoldást nem, de eredményt közlünk. Így például SM2 azt jelenti, hogy a feladat átlagos zh-példa nehézségű, van hozzá megadva segítség és megoldás is.

A feladatok, segítségek és megoldások után, két külön fejezetben közöljük a 2012. őszi zárthelyik és pótzárthelyik feladatait, illetve a pontozási útmutatókat (ezek a feladatok a gyűjteményben külön nem szerepelnek). Ennek célja az, hogy a hallgatók számára megkönnyítsük annak eldöntését, hogy mit is érdemes leírni egy megoldásban, illetve hogy az egyes gondolatmenetek a feladok megoldásának mekkora részét képezik.

E helyen szeretnénk köszönetet mondani Fleiner Tamás, Recski András és Simonyi Gábor tanszéki kollégáinknak, akikkel az évek során a zárthelyik összeállításán együtt dolgoztunk.

1. Feladatok

1.1. Térbeli koordinátageometria

1. (M0) Adjuk meg annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, amely merőleges az $x + 2y + 5z = 8$ egyenletű síkra és átmegy a $(2, 2, 3)$ ponton.

2. (M0) Határozzuk meg azon egyenes paraméteres egyenletrendszerét, amely párhuzamos az $(1, 2, 3)$ és $(2, 3, 9)$ pontokon átmenő egyenessel és átmegy a $(4, 2, 1)$ ponton.

3. (M0) Átmegy-e az origón az a sík, amely párhuzamos az $5x - 4y + 3z = 9$ egyenletű síkkal és amely tartalmazza a $P(1; 5; 5)$ pontot?

4. (SM1) Határozzuk meg azon sík egyenletét, mely tartalmazza az $x = y + 1 = z + 2$ egyenest és a $(2, 3, 5)$ pontot.

5. (M1) Határozzuk meg az $S_1 : 5x - 3y + z = 16$ és az $S_2 : 3x + 2y - z = -9$ síkok metszésvonalának paraméteres egyenletrendszerét.

6. (M1) Legyen $A = (2, 4, 6)$, $B = (4, 6, -2)$. Legyen S az AB szakasz felező merőleges síkja (vagyis az a sík, melynek pontjai ugyanolyan távol vannak A-tól és B-től). Határozzuk meg S (egy) egyenletét.

7. (E1) Írjuk fel a tér $P = (0, 2, 4)$ és $Q = (6, -2, 2)$ pontjait összekötő szakasz felező merőleges síkjának egyenletét.

8. (M1) Az $A(2; 5; 1)$, $B(5; 7; 4)$, $C(6; 4; 2)$ és $D(9; 7; 5)$ pontokra adjuk meg az $ABCD$ tetraéder ABC lapjához tartozó magasságvonalának egyenletrendszerét. (Egy tetraéder egy lapjához tartozó magasságvonala alatt a lap síkjára merőleges és a lapra nem illeszkedő csúcson áthaladó egyenest értjük.)

9. (M1) Az f egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$x = 3t + 1,\ y = 4t - 2,\ z = 7t - 1.$$

Adjuk meg egy f-fel párhuzamos, origón átmenő sík egyenletét.

10. (M1) Adjuk meg az összes olyan c értéket, melyre az

$$x = t + 1,\ y = t + 2,\ z = ct + 3$$

paraméteres egyenletrendszerrel megadott egyenes döfi az $x + y + z = 3$ egyenletű síkot.

11. (E1) Legyen az e egyenes az $x+2y+3z = 4$ és a $2x+3y+4z = 5$ síkok metszésvonala. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amely merőleges az e egyenesre és átmegy a $(3, 5, 6)$ ponton.

12. (SM2) Tekintsük az $x + 2y + 3z = 14$, a $2x + 6y + 10z = 24$ és a $4x + 2y + pz = 68$ egyenletekkel megadott síkokat a szokásos háromdimenziós térben, ahol p tetszőleges valós paraméter. Határozzuk meg (p minden lehetséges értékére) a tér összes olyan pontját, amely e három sík mindegyikén rajta van.

13. (M2) Adjuk meg az összes olyan c értéket, melyre az $x+2y+z=3$ és $cx+4y+2z=4$ síkok metszők és a metszetegyenes párhuzamos a $3x+6y+cz=5$ síkkal.

14. (M2) Tekintsük az $A=(2,1,4)$, $B=(1,1,6)$, $C=(3,0,1)$, $D=(0,1,1)$, $E=(7,1,3)$ pontokat a szokásos 3 dimenziós térben. Határozzuk meg az A,B és C, illetve C,D és E pontok által meghatározott síkok metszetegyenesének irányvektorát.

15. (M1) Az f egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$x=4t+1,\ y=8t+1,\ z=16t+1,$$

az S sík egyenlete $2y+z=p$, ahol p tetszőleges valós paraméter. Határozzuk meg az f egyenes és az S sík közös pontjainak számát a p paraméter minden lehetséges értékére.

16. (M2) Az f egyenes paraméteres egyenletrendszere

$$x=t+1,\ y=t+2,\ z=-1.$$

Határozzuk meg annak az egyenesnek a paraméteres egyenletrendszerét, mely merőleges f-re, metszi f-et és átmegy az origón.

17. (M2) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a $P(12;1;7)$ ponton és merőlegesen metszi az

$$x-3=\frac{y-2}{3}=\frac{-z-1}{4}$$

egyenletrendszerű egyenest.

18. (SM2) Legyen $A=(1,1,2)$, $B=(4,2,5)$, $C=(4,0,3)$, $D=(10,2,p)$. Adjuk meg a p paraméter összes olyan értékét, melyre az AB és CD egyenesek kitérők.

1.2. Vektortér, altér

19. (SM1) Vektorteret alkotnak-e a szokásos mátrixösszeadásra és skalárral szorzásra azok a 3×5-ös mátrixok, melyek bal szélső 3×3-as részmátrixának determinánsa 0?

20. (SM1) Vektorteret alkotnak-e a szokásos mátrixösszeadásra és skalárral szorzásra azok az 5×3-as mátrixok, melyek legalább 11 darab 0-t tartalmaznak?

21. (SE1) Igaz-e, hogy a nem invertálható kétszer kettes mátrixok vektorteret alkotnak a szokásos mátrixösszeadás és skalárral szorzás műveletére nézve?

22. (SE1) Vektorteret alkotnak-e a szokásos mátrixösszeadással és skalárral való szorzással azok a 3×3-as mátrixok, melyekben a főátló minden eleme 0?

23. (SE1) Vektorteret alkotnak-e a szokásos mátrixösszeadással és skalárral való szorzással azok a 3×3-as mátrixok, melyekben legalább három elem 0?

24. (SE1) Vektorteret alkotnak-e a szokásos mátrixösszeadással és skalárral való szorzással a (főátlóra) szimmetrikus $n\times n$-es mátrixok?

25. (SE1) Igaz-e, hogy a nem negatív determinánsú 2×2-es mátrixok vektorteret alkotnak a szokásos mátrixösszeadás és skalárral szorzás műveletére nézve?

26. (SM2) Legyen M azon 2×3-as mátrixok halmaza, melyekben a bal alsó és a jobb felső elemek összege legalább akkora, mint a bal felső és a jobb alsó elemek összege. Igaz-e, hogy a szokásos mátrixösszeadás és skalárral szorzás műveletekkel M vektorteret alkot?

27. (SM2) Igaz-e, hogy azok az (a, b, c) valós számhármasok, melyekre $ac = bc$ vektorteret alkotnak a szokásos (koordinátánkénti) összeadásra és skalárral szorzásra?

28. (SE2) Igaz-e, hogy azok az (a, b, c, d) valós számnégyesek, melyekre $a + 2c = 3b + 4d$ vektorteret alkotnak a szokásos (koordinátánkénti) összeadásra és skalárral szorzásra?

29. (SM2) Vektorteret alkotnak-e a szokásos műveletekkel azok a valós polinomok, melyekben a harmadfokú és az ötödfokú tag együtthatójának összege 0?

30. (SM2) Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Legyen V-n a $\oplus$ művelet a síkvektorok hagyományos összeadása; értelmezzük továbbá tetszőleges $\underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az $\odot$ szorzást az alábbiak szerint:

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix}.$$

Vektorteret alkot-e V az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

31. (SM3) Legyen V a legföljebb másodfokú, valós együtthatós polinomok halmaza. Legyen V-n a $\oplus$ művelet a polinomok szokásos összeadása; értelmezzük továbbá tetszőleges $\underline{v} = ax^2 + bx + c \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a $\lambda \odot \underline{v}$ szorzást így: $\lambda \odot (ax^2 + bx + c) = ax^2 + bx + \lambda \cdot c$. Vektorteret alkot-e V az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

1.3. Függetlenség, generálás, bázis, dimenzió

32. (SM2) Határozzuk meg a p valós paraméter minden olyan értékét, melyre az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^4$ vektorok független rendszert alkotnak.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ p \\ p+1 \end{pmatrix} \ \text{és} \ \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

33. (M2) A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy igaz-e a $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ állítás az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \in \mathbb{R}^4$ vektorokra.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 7 \\ p \end{pmatrix} \ \text{és} \ \underline{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

34. (SM2) Határozzuk meg a c valós paraméter minden olyan értékét, melyre az alábbi $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{v} \in \mathbb{R}^4$ vektorok generátorrendszert alkotnak.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ c \\ c \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ c \\ c \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} c \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

35. (M2) Határozzuk meg a c valós paraméter minden olyan értékét, melyre az alábbi $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^4$ vektorok független rendszert alkotnak.

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} c \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \\ 3 \end{pmatrix}.$$

36. (SM2) Egészítsük ki a szokásos háromdimenziós tér egy bázisává a $(3, 5, 2)$, $(5, 2, 3)$ vektorrendszert.

37. (M2) Egy tíz dimenziós vektortérben két bázisnak pontosan kilenc közös eleme van. Igaz-e, hogy a bázisok nem közös elemei biztosan számszorosai egymásnak?

38. (SM2) Megadható-e egy négy dimenziós vektortérben két olyan bázis, melyeknek pontosan két közös eleme van és a nem közös négy vektor szintén bázist alkot?

39. (S2) A tér három síkjának pontosan egy közös pontja van. Mutassuk meg, hogy a normálvektoraik bázist alkotnak.

40. (S2) Tegyük fel, hogy az $\underline{u_1}, \underline{u_2}, \ldots, \underline{u_m}$ vektorok között pontosan egy olyan van, ami kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. Mutassuk meg, hogy ekkor ez a vektor csakis a nullvektor lehet.

41. (M2) Legyen $\{\underline{b_1}, \underline{b_2}, \underline{b_3}, \underline{b_4}\}$ bázis egy V vektortérben, legyen továbbá $\underline{b} = \underline{b_1} + \underline{b_2} + \underline{b_3} + \underline{b_4}$. Mutassuk meg, hogy $\{\underline{b_1} + \underline{b}, \underline{b_2} + \underline{b}, \underline{b_3} + \underline{b}, \underline{b_4} + \underline{b}\}$ is bázis V-ben.

42. (SE2) Legyen az $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ vektorrendszer lineárisan független egy V vektortérben. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$ rendszer is biztosan lineárisan független V-ben?

43. (SE2) Az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4$ vektorok függetlenek. Igaz-e, hogy ekkor az $\underline{u}_1 + 2\underline{u}_2, \underline{u}_2 + 2\underline{u}_3, \underline{u}_3 + 2\underline{u}_4, \underline{u}_4 + 2\underline{u}_1$ vektorok is mindig függetlenek?

44. (SE2) Az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4$ vektorok összefüggők. Igaz-e, hogy ekkor a $2\underline{u}_1 + 3\underline{u}_2, 2\underline{u}_2 + 3\underline{u}_3, 2\underline{u}_3 + 3\underline{u}_4, 2\underline{u}_4 + 3\underline{u}_1$ vektorok is mindig összefüggők?

45. (S3) Az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_{15}$ vektorok közül az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4$ és $\underline{u}_5$ vektorok fejezhetők ki a többi vektor lineáris kombinációjaként. Mutassuk meg, hogy az $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4, \underline{u}_5$ rendszer nem független.

46. (M3) Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ a (tetszőleges) V vektortér vektorai, amelyekre $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ és $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ teljesülnek. Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül:

(i) az állítás biztosan igaz;
(ii) az állítás biztosan hamis;
(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (V és $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ választásától függően).

a) $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$ b) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ c) $\underline{b} \in \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$

47. (M3) Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok lineárisan függetlenek a V vektortérben. Tegyük fel továbbá, hogy minden $\underline{u} \in V$ esetén léteznek olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{100}$ skalárok, melyekre a $\underline{v}_1 + \alpha_1\underline{u}, \underline{v}_2 + \alpha_2\underline{u}, \ldots, \underline{v}_{100} + \alpha_{100}\underline{u}$ vektorok lineárisan összefüggők. Határozzuk meg V dimenzióját.

1.4. Lineáris egyenletrendszerek

48. (E0) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-eliminációval.

$$2x + 4y + 3z = 5$$
$$3x + 5y + 7z = 9$$
$$2x + 2y + 8z = 8$$

49. (E1) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a t valós paraméter minden lehetséges értékére.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ 3x + 2y + 3z &= 8 \\ x - 2y + tz &= 10 \end{aligned}$$

50. (E1) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c valós paraméter minden lehetséges értékére.

$$2x + 4y + 6z = 6$$
$$2x + 5y + cz = 6$$
$$3x + 6y + 10z = 7$$

51. (E1) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c valós paraméter minden lehetséges értékére.

$$3x + 6y + 6z = 9$$
$$2x + 4y + cz = 6$$
$$2x + 3y + 9z = 8$$

52. (E1) Határozzuk meg az alábbi három sík közös pontjainak számát a p paraméter minden lehetséges értékére.

$$5x + 6y + 7z = 3$$
$$2x + 3y + pz = 9$$
$$4x + 4y + 9z = 8$$

53. (SM1) Milyen s, illetve t értékek mellett lesz az alábbi egyenletrendszernek pontosan egy megoldása?

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 2 \\ -3x + y - z &= 2 \\ x - y + 3tz &= 2s \end{aligned}$$

54. (M1) Milyen a és b értékek mellett lesz pontosan három megoldása az alábbi egyenletrendszernek?

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 3z &= 8 \\ 4x + 2y - 2z &= 8 \\ 4x + 2y - az &= 9 \\ 4x + 2y - bz &= 10 \end{aligned}$$

55. (E1) A t valós paraméter mely értékére lesz az alábbi egyenletrendszernek

a) pontosan egy megoldása?

b) pontosan két megoldása?

$$\begin{aligned} -x + 2y + 4z &= 3 \\ 3x + y + 2z &= 5 \\ x - y + 3tz &= 9 \end{aligned}$$

56. (E1) A t valós paraméter mely értékére lesz az alábbi egyenletrendszernek

a) pontosan egy megoldása?

b) legalább egy megoldása?

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 4 \\ 2x+2y+3z &= 6 \\ 3x-y+tz &= 10 \end{aligned}$$

57. (SM2) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c valós paraméter minden értékére.

$$\begin{aligned} x+2y+z &= 3 \\ 2x+5y+3z+4w &= 8 \\ 3x+6y+cz+cw &= c+6 \end{aligned}$$

58. (SM2) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a c valós paraméter minden értékére.

$$\begin{aligned} x+y+2z &= 2 \\ 2x+y+cz+2w &= c \\ 4x+2y+cz+cw &= c \end{aligned}$$

59. (S3) Egy egyenletrendszer Gauss-eliminációval történő megoldása során nem keletkezik tilos sor és a keletkező redukált lépcsős alaknak van olyan oszlopa, ahol az elemek összege 0. Mutassuk meg, hogy létezik megoldása annak az egyenletrendszernek, melyet az eredetiből úgy kapunk, hogy minden egyenletben minden ismeretlen együtthatójához hozzáadunk egyet.

1.5. Mátrixműveletek, inverz mátrix, determináns, rang

60. (E0) Határozzuk meg az alábbi mátrix determinánsát.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

61. (M0) Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az $A^{-1}B^{-1}$ szorzatot.

62. (M0) Legyen egy parallelepipedon egyik csúcsa az origó, az ezzel szomszédos három csúcsa pedig $A(0;1;-2)$, $B(1;1;5)$, illetve $C(1;3;-1)$. Határozzuk meg a parallelepipedon térfogatát.

63. (M1) A 4×4-es A és B mátrixok i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet jelölje $a_{i,j}$, illetve $b_{i,j}$ minden $1 \le i,j \le 4$ esetén. Tegyük fel, hogy

$$a_{i,j} = \begin{cases} i+j, & \text{ha } j = 1,2, \\ 9-i-j, & \text{ha } j = 3,4; \end{cases} \qquad b_{i,j} = \begin{cases} j, & \text{ha } i = 1,3, \\ 1-j, & \text{ha } i = 2,4, \end{cases}$$

minden $1 \le i,j \le 4$ esetén.

a) Határozzuk meg az $A \cdot B$ mátrixot.

b) Határozzuk meg a $B \cdot A$ mátrix determinánsát.

64. (E1) Számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

65. (SM1) Legyen A nem 0 determinánsú 9×9-es mátrix, A' pedig az a mátrix, amit A első sorának λ-val való szorzásával kapunk. Mennyi lehet λ értéke, ha tudjuk, hogy $\det(A') = \det(\lambda A)$?

66. (S1) Egy nem 0 determinánsú négyzetes mátrix minden elemét megszorozzuk c-vel. Mennyi lehet c értéke, ha a mátrix determinánsa változatlan marad?

67. (M2) Adjuk meg az alábbi determináns definíció szerinti kiszámításakor keletkező összes nemnulla szorzatot és ezek előjelét.

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 9 & 8 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

68. (M2) A t paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e olyan $\underline{y}$ sorvektor, amelyre $\underline{y} \cdot A = \underline{c}$ teljesül, ahol az A mátrix és a $\underline{c}$ sorvektor az alábbiak. Ha létezik ilyen $\underline{y}$, adjuk meg az összeset.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 8 & 7 \\ 25 & 19 & 16 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 20 & 16 & t \end{pmatrix}.$$

69. (SE2) Egy legalább 3×3-as, négyzetes mátrix minden sora számtani sorozat. Mennyi lehet a determinánsa?

70. (M2) Legyen A tetszőleges 6×8-as mátrix, melynek rangja 3. Igaz-e hogy mindig kiválasztható olyan 4×6-os részmátrixa, melynek rangja szintén 3?

71. (M2) Határozzuk meg az alábbi determináns értékét a c paraméter függvényében.

$$\begin{vmatrix} c & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2c \end{vmatrix}$$

72. (S2) Határozzuk meg, hogy a p paraméter mely értékeire lesz invertálható az alábbi mátrix. Ha létezik, adjuk is meg az inverzet.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & p \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

73. (SM2) Legyen A olyan 3 sorból és 5 oszlopból álló mátrix, amiben az utolsó három oszlop által alkotott B négyzetes részmátrix determinánsa nem nulla. Igaz-e, hogy ekkor mindig létezik olyan C mátrix, amivel A-t jobbról megszorozva egységmátrixot kapunk?

74. (SM2) Legyen A olyan $n \times n$-es mátrix, amire $\det A \neq 0$, B pedig tetszőleges $n \times n$-es mátrix. Igaz-e, hogy létezik olyan $n \times n$-es X mátrix, melyre $AX = B$?

75. (SM2) Adjuk meg az alábbi mátrix rangját a c valós érték függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & c \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

76. (SM2) Adjuk meg az alábbi mátrix rangját a p valós paraméter minden értékére.

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 12 & 7 \\ -1 & -1 & 3 & -12 & 0 \\ 5 & 22 & 19 & p & p+3 \end{pmatrix}$$

77. (E2) Számítsuk ki a következő mátrix rangját x minden lehetséges valós értékére.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

78. (2) Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját a t valós paraméter minden lehetséges értékére.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & t \end{pmatrix}$$

79. (2) Számítsuk ki a következő mátrix rangját x minden lehetséges valós értékére.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & x \\ 1 & -5 & 1 & 3x \\ 8 & -6 & 25 & 2 \end{pmatrix}$$

80. (M2) Legyen A az alább látható mátrix. Adjuk meg az n egész paraméter azon értékeit, melyekre az A mátrix invertálható és $\det A^{-1}$ pozitív egész szám. Ezen n értékekre határozzuk is meg az A^{-1} mátrixot.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & n \end{pmatrix}$$

81. (M2) Legyen A egy 50×100-as (50 sorú és 100 oszlopú) mátrix. Tegyük fel, hogy bárhogyan is választjuk a $\underline{b} \in \mathbb{R}^{50}$ vektort, mindig található olyan $\underline{x} \in \mathbb{R}^{100}$ vektor, amelyre $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$. Határozzuk meg A rangját.

82. (S2) Létezik-e olyan 5 rangú 5×5-ös mátrix, melynek minden 3×3–as aldeterminánsa 0?

83. (M2) Egy 10×10 -es mátrix rangja 3. Mutassuk meg, hogy legalább 7 elemét meg kell változtatnunk ahhoz, hogy a kapott mátrix rangja 10 legyen.

84. (E2) Legyenek A, B és C olyan 3×3-as mátrixok, melyekre az ABC mátrixnak létezik inverze. Melyek teljesülnek mindig az alábbi állítások közül? (Indokoljunk is!)

a) $A + B + C$-nek is létezik inverze.

b) CAB-nek is létezik inverze.

c) Annak a 6×6-os mátrixnak is létezik inverze, melynek bal felső 3×3-as részmátrixa ABC, jobb alsó 3×3-as részmátrixa CAB, a többi elem (azaz a bal alsó és a jobb felső 3×3-as részmátrixok elemei) pedig csupa 0.

85. (M2) Legyen $\underline{x}$ tetszőleges, nullvektortól különböző n dimenziós oszlopvektor, A és B pedig olyan $n \times n$–es mátrixok, melyekre teljesül, hogy $A\underline{x} = B\underline{x}$. Igaz-e, hogy ekkor biztosan teljesül, hogy $\det(A - B) = 0$?

86. (M2) Legyen A 3×5-ös, B 5×3-as mátrix, melyekre teljesül, hogy AB a 3×3-as egységmátrix. Mutassuk meg, hogy A sorai függetlenek.

87. (SM2) Legyen A olyan 2×2-es mátrix, melyre $A^2 = A$. Mennyi lehet A rangja?

88. (M2) Legyen $\sigma = (\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(100))$ az $1, 2, \ldots, 100$ elemek egy permutációja. Definiáljuk σ'-t a következőképp:

$$\sigma'(i) = \begin{cases} \sigma(i+1), & \text{ha } 1 \leq i \leq 99 \\ \sigma(1), & \text{ha } i = 100. \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy $I(\sigma)$ és $I(\sigma')$ ellenkező paritású.

89. (SE3) Legyen M az az $n \times n$-es mátrix, melynek főátlójában minden elem 0, főátlóján kívül pedig minden elem 1. Határozuk meg M determinánsát.

90. (SM3) Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es A, B és C mátrixokra az $AX = B$ egyenlet megoldható, de az $AX = C$ egyenlet nem. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $n \times n$-es D mátrix, amelyre a $BX = D$ egyenlet nem megoldható. (Az $AX = B$ egyenlet megoldhatóságán azt értjük, hogy létezik olyan $n \times n$-es X mátrix, amelyre $AX = B$ fennáll.)

91. (S2) Igaz-e, hogy tetszőleges A és B $n \times n$-es mátrixokra AB és BA rangja azonos?

92. (S2) Léteznek-e olyan 2×2-es A és B mátrixok, melyekre $A^2 = B^2$, de $A \neq B$ és $A \neq -B$?

93. (S2) Léteznek-e olyan 2×2-es A, B és C mátrixok, melyekre $A^2 = B^2 = C^2$, és az A, B, C, $-A$, $-B$, $-C$ mátrixok mind különbözők?

94. (S3) Legyenek A és B olyan négyzetes mátrixok, melyekre $A^2 = B^2$, $AB = BA$ és $A + B$ determinánsa nem 0. Igaz-e, hogy ilyenkor $A = B$?

95. (S2) Egy 10×10-es mátrix első hat sorában az első öt elem (összesen tehát 30 elem) 0. Megadható-e a többi elem úgy, hogy a mátrix rangja 10 legyen?

96. (SM3) Egy 5×5-ös mátrixban 6 egyes és 19 nulla szerepel. Mutassuk meg, hogy a determinánsa 0, 1 vagy -1.

97. (S3) Egy 5×5-ös mátrixban 7 egyes és 18 nulla szerepel. Mutassuk meg, hogy a determinánsa 0, 1 vagy -1.

98. (3) Adjunk példát olyan 5×5-ös mátrixra, melyben 8 egyes és 17 nulla szerepel, a determinánsa pedig 2.

99. (SM2) Egy 5×5–ös mátrixban háromszor szerepel a 0, négyszer az 1 és tizennyolcszor a 2. Mutassuk meg, hogy a mátrix determinánsa nem 1.

100. (S2) Egy 5×5-ös mátrixban egyszer szerepel a 0, minden más elem 1 vagy -1. Mutassuk meg, hogy a mátrix determinánsa nem 1 és nem -1.

101. (SM2) Létezik-e olyan 5×5-ös mátrix, melynek egyetlen eleme sem 0 és minden előjeles aldeterminánsa 0?

102. (SM3) Létezik-e olyan 5×5-ös mátrix, melynek egyetlen eleme sem 0 és pontosan egy olyan előjeles aldeterminánsa van, mely nem 0?

103. (SM3) Egy 5×5-ös mátrix determinánsának definíció szerinti kiszámításakor 30 nullától különböző szorzatot kapunk. Igaz-e, hogy ekkor a mátrix legfeljebb 15 nullát tartalmaz?

104. (SM4) Egy $n \times n$-es ($n \geq 2$) A mátrixnak minden előjeles aldeterminánsa ugyanannyi. Mutassuk meg, hogy $\det A = 0$.

105. (SM3) Egy $n\times n$-es ($n \geq 2$) A mátrixra teljesül, hogy bármely elemét 0-ra kicserélve a determinánsa nem változik. Mutassuk meg, hogy $\det A = 0$.

106. (S4) Egy $n \times n$-es ($n \geq 2$) A mátrixra teljesül, hogy bármely két elemét kicserélve a determinánsa nem változik. Mutassuk meg, hogy $\det A = 0$.

1.6. Lineáris leképezések

107. (SM2) Mutassuk meg, hogy a síkon lineáris transzformáció az a leképezés, mely minden (x, y) vektorhoz a $(10x + y, 10x + y)$ vektort rendeli.

108. (M2) Határozzuk meg az előző feladat lineáris transzformációjának képterét és magterét.

109. (SM3) Igaz-e, hogy tetszőleges, origón átmenő e egyenes esetén létezik a síknak olyan lineáris transzformációja, melynek magtere éppen e?

110. (S3) Igaz-e, hogy tetszőleges, origón átmenő e egyenes esetén létezik a síknak olyan lineáris transzformációja, melynek képtere éppen e?

111. (M2) Létezik-e a síknak olyan lineáris transzformációja, mely az origóhoz az origót rendeli, minden más vektorhoz pedig az $(1, 1), (2, 2), (3, 3)$ vektorok valamelyikét?

112. (E2) Tudjuk, hogy a 135 fokos forgatás a sík egy lineáris transzformációja. Adjuk meg egy mátrixát.

113. (SE2) Határozzuk meg a síkon az x tengelyre való tükrözés, mint lineáris transzformáció mátrixát az $\{(1, 2),\ (1, 0)\}$ bázisban.

114. (SE2) Adjuk meg a 90 fokos forgatás, mint a sík egy lineáris transzformációja mátrixát az $(1,0)$ és $(1,2)$ vektorokból álló bázisban.

115. (S2) Van-e olyan lineáris transzformációja $\mathbb{R}^3$-nek (a szokásos háromdimenziós valós térnek), aminek a képtere és a magtere azonos?

116. (S2) Van-e olyan lineáris transzformációja $\mathbb{R}^4$-nek (a négydimenziós valós térnek), aminek a képtere és a magtere azonos?

117. (S2) Legyen $\mathcal{A}$ a szokásos három dimenziós tér olyan lineáris transzformációja, melynek a képtere két dimenziós. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik olyan $v \in \mathbb{R}^3$ vektor, ami sem a magtérnek, sem a képtérnek nem eleme.

118. (SM2) A sík egy lineáris transzformációjáról tudjuk, hogy az $(5,3)$ vektor képe a $(2,3)$ vektor, a $(4,3)$ vektor képe pedig a $(3,2)$ vektor. Mi lesz a $(11,6)$ vektor képe?

119. (SM3) A sík egy lineáris transzformációjáról tudjuk, hogy az $(5,3)$ vektor képe a $(3,2)$ vektor, a $(4,3)$ vektor képe pedig a $(2,1)$ vektor. Mi lesz a $(11,6)$, $(6,11)$, $(3,2)$, $(2,2)$, $(3,5)$, $(3,4)$ vektorok képe?

120. (E2) Legyen $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció. Az $(1,1)$ vektor $\mathcal{B}$ szerinti képe a $(4,3)$ vektor, az $(1,0)$ képe pedig a $(-1,2)$ vektor. Adjuk meg $\mathcal{B}$ mátrixát a szokásos bázisban.

121. (M2) Legyen adott a 2 dimenziós V vektortéren a $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ bázis és az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ mátrixa a B bázis szerint az alábbi A mátrix. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$.

$$A = \begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

122. (M2) Legyen az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa a szokásos bázisban az alább látható mátrix. Határozzuk meg $Im(\mathcal{A})$-t és $Ker(\mathcal{A})$-t.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

123. (M3) Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ mátrixa a B és C bázisok szerint az alábbi A mátrix, ahol $B = \{(2;3),(2;5)\}$ és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3\}$, ahol $\underline{c}_1 = (1;2;1)$ (de $\underline{c}_2$ és $\underline{c}_3$ nem ismert). Határozzuk meg a $\underline{c}_3$ vektort, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}$ a $(6;11)$ vektorhoz az $(1;6;7)$ vektort rendeli.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

124. (M3) Legyen az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés mátrixa a szokásos bázisban az alább látható mátrix. Határozzuk meg a c valós paraméter minden értékére $Im(\mathcal{A})$-t és $Ker(\mathcal{A})$-t.

$$\begin{pmatrix} 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & c \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

125. (2) Legyen $\mathcal{A}$ egy V vektortér tetszőleges lineáris transzformációja. Tudjuk, hogy az $\mathcal{A}(v_1), \ldots, \mathcal{A}(v_k)$ vektorok bázist alkotnak $Im(\mathcal{A})$-ban. Igaz-e, hogy a $v_1, \ldots, v_k$ vektorok lineárisan függetlenek?

126. (3) Legyen $\mathcal{A}$ a V vektortér tetszőleges lineáris transzformációja, a $v_1, \ldots, v_k$ vektorok pedig V egy generátorrendszere. Tudjuk, hogy $\mathcal{A}(v_1), \ldots, \mathcal{A}(v_k)$ bázis $Im(\mathcal{A})$-ban. Igaz-e, hogy $\mathcal{A}$ invertálható?

1.7. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

127. (E1) Adjuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit és minden sajátértékhez egy-egy sajátvektort is.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

128. (S1) Bizonyítsuk be, hogy az $\underline{x}$ vektor akkor és csak akkor sajátvektora az A invertálható mátrixnak, ha sajátvektora A^{-1}-nek.

129. (2) Legyen $\mathcal{A}$ a következő lineáris transzformáció a szokásos 2 dimenziós térben: kétszeres nagyítás az origóból, majd vetítés az $x + y = 0$ egyenesre. Határozzuk meg $\mathcal{A}$ mátrixát a szokásos bázisban, továbbá a sajátértékeket, az összes sajátvektort és a karakterisztikus polinomot.

130. (2) Legyen $\mathcal{A}$ a következő lineáris transzformáció a szokásos 3 dimenziós térben: kétszeres nagyítás az origóból, majd forgatás $+90$ fokkal a z tengely körül. Határozzuk meg $\mathcal{A}$ mátrixát a szokásos bázisban, továbbá a sajátértékeket, az összes sajátvektort és a karakterisztikus polinomot.

131. (M2) A sík egy lineáris transzformációja az $(1, 0)$ vektorhoz a $(4, 2)$ vektort rendeli, a $(0, 2)$ vektorhoz pedig a $(3, 4)$ vektort. Határozzuk meg a transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait.

132. (M2) A sík egy lineáris transzformációja az $(1, 1)$ vektorhoz a $(-1, 7)$ vektort rendeli, a $(2, 1)$ vektorhoz pedig az $(1, 8)$ vektort. Határozzuk meg a transzformáció sajátértékeit és sajátvektorait.

133. (M2) Az 5×5-ös A mátrix negyedik oszlopának (felülről) a negyedik eleme 7, a negyedik oszlop összes többi eleme 0. (A mátrix többi eleme nem ismert.)
a) Mutassuk meg, hogy $\lambda = 7$ sajátértéke A-nak.
b) Adjuk meg A egy sajátvektorát.

134. (M2) Az alábbi A mátrixról tudjuk, hogy $\lambda = 3$ sajátértéke A-nak.
a) Határozzuk meg a p valós paraméter értékét.
b) Adjuk meg az A mátrix egy sajátvektorát.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & p \\ 5 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

135. (2) A sík egy lineáris transzformációja a $(3, 2)$ vektorhoz a $(0, 15)$ vektort rendeli, az $(5, 3)$ vektorhoz pedig az $(1, 23)$ vektort. Döntsük el, hogy 9 a transzformáció sajátértéke-e.

136. (SM2) Legyen $\mathcal{A}$ a V vektortér tetszőleges lineáris transzformációja. Igaz-e, hogy
a) $\mathcal{A}^3$ minden sajátvektora sajátvektora lesz $\mathcal{A}$-nak is?
b) $\mathcal{A}$ minden sajátvektora sajátvektora lesz $\mathcal{A}^3$-nek is?

137. (S2) Legyen $\mathcal{A}$ a V vektortér olyan lineáris transzformációja, melyre $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{A}$-nak csak a 0 és az 1 lehetnek a sajátértékei.

138. (3) Legyen $\mathcal{A}$ a V vektortér olyan lineáris transzformációja, melyre $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$, de $\mathcal{A}$ nem az identitás és nem a 0 leképezés (amely minden vektort a nullvektorba visz). Mutassuk meg, hogy $\mathcal{A}$-nak a 0 és az 1 a sajátértékei.

139. (SM2) Az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ vektorok ugyanannak az $\mathcal{A}$ lineáris transzformációnak különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorai. Mutassuk meg, hogy $\underline{u}+\underline{v}$ nem sajátvektora $\mathcal{A}$-nak.

140. (S2) A sík egy $\mathcal{A}$ lineáris transzformációjának $\underline{u}$ sajátvektora, a $\underline{v}$ vektor pedig nem sajátvektora és nem is a nullvektor. Lehetséges-e, hogy $\underline{u} + \underline{v}$ sajátvektora $\mathcal{A}$-nak?

1.8. Komplex számok

141. (M1) Végezzük el az alábbi műveleteket a komplex számok halmazán és az eredményt adjuk meg algebrai alakban.
a) $(3 + 2i)^2$
b) $(1 + 17i) : (3 + i)$
c) $\sqrt[3]{-1000}$

142. (1) Írjuk fel -1 hatodik gyökeit algebrai alakban.

143. (M2) Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós és a képzetes része is pozitív.

$$(5 + \sqrt{3}i)z^5 = 8 - 4\sqrt{3}i$$

144. (M2) Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek egy olyan komplex megoldását, melynek a valós és a képzetes része is negatív.

$$z^8 = -1 - \sqrt{3}i$$

145. (M2) Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek az argumentuma (valós tengellyel bezárt szöge) 100° és 170° közé esik.

$$\frac{z^9}{2^{8,5}} = \frac{3 + 11i}{4 - 7i}$$

146. (2) Adjuk meg kanonikus alakban a $z^7 - 27z = 0$ egyenlet összes olyan komplex megoldását, melynek valós és képzetes része is nemnegatív.

147. (2) Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek egy olyan komplex megoldását, melynek a valós és a képzetes része is negatív.

$$z^8 = -1 - \sqrt{3}i$$

148. (2) Adjuk meg az alábbi egyenlet összes komplex megoldását kanonikus alakban.

$$(\sqrt{3} - i)z^4 = i$$

149. (2) Határozzuk meg, hogy a tizenhatodik egységgyökök közt hány hetvenedik egységgyök van.

150. (S2) Írjuk fel $6 + \sqrt{12} \cdot i$ hatodik hatványának negyedik gyökeit.

151. (S2) Írjuk fel $3 + 3 \cdot i$ tizedik hatványának ötödik gyökeit.

152. (2) Mutassuk meg, hogy az n. egységgyökök szorzata mindig 1 vagy -1.

153. (3) Mi lesz az n. egységgyökök négyzetösszege?

154. (S2) Összeszorozzuk az összes negyedik egységgyököt az összes tizedik egységgyökkel. (Ez összesen tehát 40 szorzat.) Igaz-e, hogy
a) a kapott szorzatok mind 40. egységgyökök?
b) a kapott szorzatok az összes 40. egységgyököt előállítják?

155. (SM1) Igaz-e, hogy egy n. és egy k. egységgyök szorzata is (valahányadik) egységgyök?

156. (2) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok körében.

$$(1 + i)z^5 = 2(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$$

157. (2) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok körében.

$$2(\sin 80^\circ + i \sin 10^\circ)z^6 = 3(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$$

158. (SM2) Oldjuk meg a komplex számok körében a $z^3 = \overline{z}$ egyenletet.

1.9. Kombinatorika

159. (M1) Hány különböző 3×3-as négyzetes részmátrixa van egy olyan 8×10-es (vagyis 8 sorú és 10 oszlopú) mátrixnak, melynek minden eleme különböző?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami csak a négy alapműveletet ismeri.)

160. (2) Hány olyan 99 hosszú sorozat készíthető az a, b, c, d, e betűkből, amelyben nincsenek sem szomszédos magánhangzók, sem szomszédos mássalhangzók?

161. (M1) Egy MIRNIXDIRNIX nevű országban furcsa szabályok szerint játsszák a lottót: egy szelvény kitöltése abból áll, hogy a játékos az ország nevének betűit összekeveri és valamilyen sorrendben leírja. (Így például egy lehetséges szelvény így nézhet ki: XIIRXMNDNIRI.) Az ország egyik lakója ezen a héten három szelvénnyel is szeretne játszani. Hányféleképpen töltheti ki a három szelvényt, ha arra azért szeretne vigyázni, hogy a szelvényei között ne legyen két ugyanolyan?

162. (4) Hány olyan hétjegyű szám létezik, melyben pontosan háromféle különböző számjegy szerepel és ezek egyike sem a 0?

163. (M2) Adjuk meg az alábbi kifejezés értékét két tizedesjegy pontossággal.

$$\log_2\left(\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\binom{101}{2}+\ldots+\binom{101}{50}\right)$$

164. (SM2) Hányféleképpen választhatunk az első száz pozitív egész közül két különbözőt úgy, hogy az összegük osztható legyen öttel?

2. Segítségek

4. Keressünk az egyenesen két pontot.

12. Oldjuk meg a három egyenletből álló egyenletrendszert.

18. Két egyenes akkor kitérő, ha se nem párhuzamosak, se nem metszők.

19. Az összes 3×5-ös mátrixok vektorteret alkotnak a szokásos műveletekkel, így a zártságot érdemes vizsgálni.

20. Nyilván itt is a zártságot érdemes vizsgálni.

21. Vizsgáljuk meg a zártságot.

22. Vizsgáljuk meg a zártságot.

23. Vizsgáljuk meg a zártságot.

24. Vizsgáljuk meg a zártságot.

25. Itt is vizsgáljuk meg a zártságot.

26. Az összes 2×3-as mátrixok is vektorteret alkotnak a szokásos műveletekkel, így itt is a zártságot érdemes vizsgálni.

27. Mivel az összes valós számhármasok vektorteret alkotnak a megadott műveletekkel ($\mathbb{R}^3$-öt), itt is a zártságot érdemes vizsgálni, szem előtt tartva, hogy $ac = bc \Leftrightarrow (a = b \ \vee \ c = 0)$.

28. Mivel az összes valós számnégyesek is vektorteret alkotnak a szokásos műveletekkel ($\mathbb{R}^4$-t), itt is a zártságot érdemes vizsgálni.

29. Mivel az összes valós polinomok is vektorteret alkotnak a szokásos műveletekkel, itt is a zártságot célszerű vizsgálni.

30. Ellenőrizzük az axiómákat; az összeadásra vonatkozókkal nyilván nem lesz gond (miért is?).

31. Ellenőrizzük az axiómákat; az összeadásra vonatkozókkal nyilván nem lesz gond (miért is?).

32. A vektorok akkor és csak akkor alkotnak független rendszert, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullvektort; ezt Gauss-eliminációval célszerű vizsgálni.

34. Ha nincs kedvünk azt megnézni, hogy egy tetszőleges (d, e, f, g) vektor mikor áll elő az adott vektorok lineáris kombinációjaként, akkor a vektorok függetlenségét is vizsgálhatjuk (miért?); mindkét esetben a Gauss-eliminációt érdemes használni.

36. Olyan vektort keressünk, melyet a rendszerhez véve az független marad.

38. Semmi akadálya.

39. A síkok egyenleteiből álló rendszernek egyértelmű megoldása van.

40. Indirekt.

42. Írjuk fel a nullvektort az $\underline{a} + \underline{b}, \underline{b} + \underline{c}, \underline{c} + \underline{a}$ vektorok lineáris kombinációjaként és rendezzük át az egyenlőséget.

43. Írjuk fel a nullvektort az $\underline{u}_1 + 2\underline{u}_2, \underline{u}_2 + 2\underline{u}_3, \underline{u}_3 + 2\underline{u}_4, \underline{u}_4 + 2\underline{u}_1$ vektorok lineáris kombinációjaként és rendezzük át az egyenlőséget.

44. Hány dimenziós az $\langle \underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4 \rangle$ tér?

45. Írjuk fel a nullvektort a 15 vektor egy nem triviális lineáris kombinációjaként (miért lehet?) és vizsgáljuk meg az együtthatókat.

53. Nem muszáj megoldani az egyenletrendszert, csak arra vagyunk kíváncsiak, hogy mikor van egyértelmű megoldás.

57. Természetesen Gauss-eliminációval érdemes dolgozni és nem árt figyelni rá, hogy ismeretlenekkel csak úgy nem osztunk.

58. Természetesen Gauss-eliminációval érdemes dolgozni és nem árt figyelni rá, hogy ismeretlenekkel csak úgy nem osztunk.

59. Az eredeti egyenletrendszer megoldása után próbáljuk megoldani azt az egyenletet, amiben az ismeretlenek összege 0.

65. Mi történik a determinánssal, ha egy sort megszorzunk λ-val?

66. Tudjuk, hogy mi történik a determinánssal, ha egy sor elemeit szorozzuk meg c-vel.

69. Egy oszlopból egy másikat levonva a determináns nem változik.

72. Gauss-elimináció, az első és a harmadik sor cseréjével kezdve.

73. B-nek van inverze.

74. A-nak van inverze.

75. Gauss-elimináció.

76. Használjunk Gauss-eliminációt, a rang a vezéregyesek száma lesz.

82. Kifejtési tétel.

85. $(A - B)\underline{x} = \underline{0}$.

87. 0 és 2 nyilván lehet a rang, az 1-re sem nehéz példát mutatni.

89. Kezdésnek adjuk hozzá az első sorhoz a többit.

90. A $D := C$ választás jó lesz, de kihasználhatjuk azt is, hogy $\det A = 0$ (ez miért igaz?).

91. Nem igaz, keressünk 2×2-es ellenpéldát.

92. Keressünk például olyan mátrixot, aminek a négyzete a nullmátrix (vagy az egységmátrix).

93. Használjuk az előző feladat nullmátrixtól (vagy egységmátrixtól) különböző megoldásait.

94. Ha $AB = BA$, akkor $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$.

95. Vizsgáljuk meg a mátrix determinánsát a definíció szerint vagy nézzük meg, hogy az első öt oszlop hogy viselkedik.

96. Használjuk a definíciót és vizsgáljuk a nemnulla szorzatokat.

97. Használjuk a definíciót és vizsgáljuk a nemnulla szorzatokat.

99. Használjuk a definíciót és vizsgáljuk a szorzatok paritását.

100. Használjuk a definíciót és vizsgáljuk a szorzatok paritását.

101. Igen.

102. Ha lenne ilyen, akkor találnánk benne két olyan sort, melyek szerint kifejtve a mátrix determinánsát, különböző eredményeket kapnánk.

103. Használjuk a definíciót és bizonyítsunk indirekten.

104. Használjuk a kifejtési tételt és nézzük meg a sorösszegeket.

105. Kifejtési tétel.

106. A 104. feladat valamennyit segít.

107. Igazoljuk, hogy teljesül a lineáris leképezéseket definiáló két feltétel.

108. Használjuk a definíciókat.

109. Nézzük meg, hogy mi a magtér a 107. feladatban.

110. Vetítés (merőlegesen) e-re.

113. Határozzuk meg a megadott bázis vektorainak képeit, majd írjuk fel a kapott vektorok koordinátáit a megadott bázisban.

114. Határozzuk meg a megadott bázis vektorainak képeit, majd írjuk fel a kapott vektorok koordinátáit a megadott bázisban.

115. Dimenziótétel.

116. Határozzuk meg a képtér és a magtér dimenzióját, majd adjuk meg a (szokásos) bázisvektorok képeit.

117. A képtér egy sík, a magtér egy egyenes (miért?).

118. Állítsuk elő a $(11, 6)$ vektort az $(5, 3)$ és a $(4, 3)$ vektorok lineáris kombinációjaként.

119. Eljárhatunk úgy, mint az előző feladatban, ez a $(11, 6)$ vektorra kényelmes lesz, de a többire (együtt) hosszadalmas, ehelyett érdemes a transzformáció mátrixát felírni.

128. Használjuk a sajátvektor definícióját.

131. Írjuk fel a transzformáció mátrixát a szokásos bázisban.

132. Írjuk fel a transzformáció mátrixát a szokásos bázisban.

136. Az a) feladathoz keressünk (mondjuk) olyan transzformációt, aminek nincs sajátvektora, de a köbének van. A b)-hez egyszerűen alkalmazzuk a definíciót.

137. Használjuk a definíciót.

139. Indirekt, használjuk a definíciót.

140. Miért ne?

150. A hatodik hatvány negyedik gyökei nem azonosak a harmadik hatvány második gyökeivel.

154. Vizsgáljuk meg a szorzatok 20. hatványait.

155. Vizsgáljuk meg a szorzat nk. hatványát.

158. z-t trigonometrikus alakban felírva gyors megoldást kapunk, de az algebrai alak is működik, sőt az is, ha először z hosszára, majd z szögére próbálunk rájönni.

164. Vizsgáljuk az elsőnek kiválasztott szám öttel vett osztási maradékát.

3. Megoldások, eredmények

1. A keresett egyenesnek irányvektora az adott sík bármely normálvektora, így az $(1, 2, 5)$ vektor is. A paraméteres egyenletrendszer ez alapján

$$\begin{aligned} x &= t+2 \\ y &= 2t+2 \\ z &= 5t+3. \end{aligned}$$

2. Az $(1, 2, 3)$ és $(2, 3, 9)$ pontokon átmenő egyenes (egyik) irányvektora $(2, 3, 9)-(1, 2, 3) = (1, 1, 6)$, így ez lesz a keresett egyenes (egyik) irányvektora is. Ez alapján a kérdéses egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x &= t+4 \\ y &= t+2 \\ z &= 6t+1. \end{aligned}$$

3. A megadott sík (egy) normálvektora $\underline{n}(5; -4; 3)$. Mivel a két sík párhuzamos, $\underline{n}$ a keresett síknak is normálvektora. P és $\underline{n}$ alapján a keresett sík egyenlete: $5x-4y+3z = 0$. Az origó koordinátái ezt kielégítik, így az origó rajta van a síkon.

4. Első megoldás. Keressünk az egyenesen két pontot: pl. $z = 0$ esetén $x = 2$, $y = 1$, míg $z = 1$ esetén $x = 3$, $y = 2$, így a megadott $(2, 3, 5)$ ponton kívül a $(2, 1, 0)$ és $(3, 2, 1)$ pontok is a síkban vannak. Legyen a sík egyenlete $ax + by + cz = d$, az ismert pontokat behelyettesítve a

$$\begin{aligned} 2a + 3b + 5c &= d \\ 2a + b &= d \\ 3a + 2b + c &= d \end{aligned}$$

egyenletrendszert kapjuk. Ezt az a, b, c ismeretlenekre (d-t paraméternek tekintve) megoldjuk Gauss-eliminációval vagy ahogy jólesik, és azt kapjuk, hogy $a = 3d$, $b = -5d$, $c = 2d$. Mivel a sík egyenletében nem lehet a, b, c mindegyike 0, a $d = 0$ esetet ki kell zárnunk, minden más esetben a sík egyenlete $3dx - 5dy + 2dz = d$ lesz. Mivel $d \neq 0$, nyugodtan oszthatunk vele, ekkor a $3x - 5y + 2z = 1$ egyenletet kapjuk.

Ha nincs kedvünk d-t paraméternek tekinteni vagy túl misztikusnak találjuk, megoldhatjuk az egyenletrendszert konkrét d értékre is, szem előtt tartva, hogy a keresett síkegyenlet számszorosai is síkegyenletek, azaz ha valamilyen 0-tól különböző szám lehet d értéke, akkor lesz olyan egyenlet, amiben $d = 1$, ellenkező esetben pedig persze $d = 0$. Ezt a két értéket elég tehát kipróbálni ($d = 1$-re a felírt egyenletet kapjuk, $d = 0$-ra pedig azt, hogy nincs megoldás, mert $a = b = c = 0$).

Második megoldás. Az $A = (2, 1, 0)$ és $B = (3, 2, 1)$ pontok az egyenesen vannak, így benne kell lenniük a síkban is. Legyen a $(2, 3, 5)$ pont neve C, ez is a síkban van, így az $\overrightarrow{AC} = (2, 3, 5) - (2, 1, 0) = (0, 2, 5)$ és $\overrightarrow{BC} = (2, 3, 5) - (3, 2, 1) = (-1, 1, 4)$ vektorok is a síkban vannak. Mivel $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BC}$ nem párhuzamosak, a vektoriális szorzatuk a keresett sík normálvektora lesz. A vektoriális szorzatot determináns és a kifejtési tétel segítségével felírva:

$$\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4 - 1 \cdot 5)\underline{i} - (0 \cdot 4 - 5 \cdot (-1))\underline{j} + (0 \cdot 1 - 2 \cdot (-1))\underline{k} = (3, -5, 2).$$

Innen a sík (egyik) egyenlete $3x - 5y + 2z = d$, valamely d számra. d értékét a sík egy tetszőleges pontját (mondjuk A-t) behelyettesítve kapjuk: $3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = d$, azaz a keresett (egyik) síkegyenlet $3x - 5y + 2z = 1$.

5. Első megoldás. Keressünk két pontot az egyenesen. Ha szerencsénk van (részleteket ld. a második megoldásnál), akkor bármely szám lehet egyenesen lévő pont első koordinátája, így elég két darab kétismeretlenes egyenletet megoldani, mondjuk legyen $x = 0$, ekkor $-3y+z = 16$ és $2y-z = -9$, ahonnan $y = -7$ és $z = -5$, illetve $x = 1$, ekkor $-3y+z = 11$ és $2y - z = -12$, ahonnan $y = 1$ és $z = 14$. A $(0, -7, -5)$ és $(1, 1, 14)$ pontok tehát az egyenesen vannak, ezek különbsége, $(1, 8, 19)$ jó lesz irányvektornak, a paraméteres egyenletrendszer tehát

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 8t - 7 \\ z &= 19t - 5. \end{aligned}$$

Mi a teendő, ha nincs szerencsénk és hogy derül ez ki? Úgy derül ki, hogy a kétismeretlenes egyenletrendszernek nem lesz megoldása (vagy ha pont beletaláltunk az egyetlen szóbajövő értékbe, akkor végtelen sok megoldása lesz), ilyenkor megpróbálkozhatunk a második koordinátával, ha ez sem működik, akkor a harmadikkal és ez már biztosan jó lesz, hiszen mindhárom koordináta nem lehet fix, ekkor ugyanis nem egyenesünk, hanem pontunk lenne. Az egész hercehurca elkerülhető persze, ha az eredeti, három ismeretlenes rendszert oldjuk meg (pl. Gauss-eliminációval).

Második megoldás. A metszésvonal irányvektora mindkét síkkal párhuzamos, tehát mindkét sík normálvektorára merőleges lesz, azaz párhuzamos lesz a két normálvektor vektoriális szorzatával. A vektoriális szorzatot determináns és a kifejtési tétel segítségével felírva

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (1, 8, 19).$$

Szükségünk van még az egyenes egy pontjára, ehhez a két síkegyenletből álló egyenletrendszernek kell megtalálnunk egy megoldását. Ezt sokféleképp megtehetjük (pl. Gauss-eliminációval), de a leggyorsabb, ha megpróbálunk megszabadulni az egyik ismeretlentől. Mivel az egyenes irányvektorának első koordinátája nem 0, tetszőleges a szám esetén lesz olyan pontja az egyenesnek, melynek első koordinátája a (ezt a paraméteres egyenletrendszer első egyenletét vizsgálva lehet a legkönnyebben látni: $x = 1 \cdot t + p$ valamely p számra, így a $t = a - p$ választásra a pontunk első koordinátája a). Keressünk tehát (mondjuk) olyan pontot, melyre $x = 0$. Ekkor $-3y + z = 16$ és $2y - z = -9$, ahonnan $y = -7$ és $z = -5$. A kérdéses paraméteres egyenletrendszer tehát

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= 8t - 7 \\ z &= 19t - 5. \end{aligned}$$

Harmadik megoldás. Ha már az első két megoldásban mindent elkövettünk, hogy ne kelljen Gauss-eliminálni, érdemes megállapítani, hogy ezzel a technikával is lehet gyors megoldást adni. Gauss-elimináljuk a két sík egyenletéből álló rendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -9 \\ 5 & -3 & 1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & -3 \\ 5 & -3 & 1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -3 \\ 0 & -\frac{19}{3} & \frac{8}{3} & 31 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{19} & -\frac{93}{19} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{19} & \frac{5}{19} \\ 0 & 1 & -\frac{8}{19} & -\frac{93}{19} \end{array}\right)$$

A harmadik oszlopban nincs vezéregyes, tehát a z változóhoz szabad paraméter tartozik, mondjuk t. A megoldás $x = \frac{1}{19}t + \frac{5}{19}$, $y = \frac{8}{19}t - \frac{93}{19}$, $z = t$. Nini, ez egy paraméteres egyenletrendszer, ami épp az egyenes pontjaira teljesül. Akkor jó is lesz megoldásnak.

Megjegyzés. Egy egyenesnek természetesen több paraméteres egyenletrendszere is van, ez magyarázza azt, hogy a harmadik megoldás más, mint az első kettő (az első két megoldásban látott irányvektor helyett itt annak $\frac{1}{19}$-szerese szerepel és a pont is más, a harmadik koordinátája 0, nem az első). A Gauss-elimináció kellemesebb lesz, ha felcseréljük az x és a z koordináta szerepét, vagy ha (ami ezzel ekvivalens) az egyenletrendszer megoldása előtt cseréljük fel az első és a harmadik oszlopot, de egyik sem javasolt, mivel nehezítik az eljárás átlátását és számos hibalehetőséget rejtenek magukban (persze a bemutatott Gauss-eliminációt meg elég könnyű elszámolni).

6. S átmegy az AB szakasz felezőpontján, azaz a $(3, 5, 2)$ ponton. Mivel S merőleges az AB szakaszra, az $\overrightarrow{AB}$ vektor normálvektora lesz S-nek. Így S-nek normálvektora $(2, 2, -8)$, ahonnan S (egy) egyenlete $2x + 2y - 8z = d$. A d értéket a $(3, 5, 2)$ pont koordinátáit behelyettesítve kapjuk: $d = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 8 \cdot 2 = 0$.

7. Eredmény: a sík egyenlete $3x - 2y - z = 6$ (és ennek (nem nulla) számszorosai).

8. A keresett egyenesnek irányvektora lesz minden, az ABC lap síkjára merőleges (nullától különböző) vektor. Jó irányvektor lesz tehát például a $\underline{v} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ vektoriális szorzat. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5; 7; 4) - (2; 5; 1) = (3; 2; 3)$ (ahol O az origót jelöli) és hasonlóan $\overrightarrow{AC} = (6; 4; 2) - (2; 5; 1) = (4; -1; 1)$. A vektoriális szorzatot determináns és a kifejtési tétel segítségével felírva:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1))\underline{i} - (3 \cdot 1 - 3 \cdot 4)\underline{j} + (3 \cdot (-1) - 2 \cdot 4)\underline{k} = (5; 9; -11).$$

A kapott irányvektor és D segítségével a magasságvonal egyenletrendszere könnyen felírható:

$$\frac{x-9}{5} = \frac{y-7}{9} = \frac{z-5}{-11}.$$

Természetesen az irányvektor meghatározásához nem szükséges a vektoriális szorzat fogalma: valamivel több számolással skaláris szorzás segítségével, a $\underline{v} \cdot \overrightarrow{AB} = \underline{0}$, $\underline{v} \cdot \overrightarrow{AC} = \underline{0}$ összefüggéseket felhasználva is megkapható egy alkalmas $\underline{v}$ irányvektor.

9. Egy sík pontosan akkor lesz párhuzamos f-fel, ha a normálvektora merőleges f irányvektorára, $(3, 4, 7)$-re, azaz a skaláris szorzatuk 0. Legyen a normálvektor (a, b, c), ekkor tehát $3a+4b+7c = 0$ kell, hogy teljesüljön. Ennek sok megoldása van, ilyen pl. az $(1, 1, -1)$ vektor. Megfelelő megoldás tehát például az $x + y - z = 0$ sík (a jobboldali 0 onnan jön, hogy a sík átmegy az origón).

10. Egy egyenes pontosan akkor döf egy síkot, ha nem párhuzamos vele, vagyis ha az irányvektora és a sík normálvektora nem merőlegesek, azaz a skaláris szorzatuk nem 0. A megadott egyenes irányvektora $(1, 1, c)$ a megadott sík normálvektora $(1, 1, 1)$, így az egyenes akkor döfi a síkot, ha $(1, 1, c) \cdot (1, 1, 1) = c + 2 \neq 0$, azaz $c \neq -2$ esetén.

11. Eredmény: a sík egyenlete $-x + 2y - z = 1$ (és ennek (nem nulla) számszorosai).

12. Egy (x, y, z) pont akkor és csak akkor lesz rajta mindhárom síkon, ha x, y, z megoldása a három síkegyenletből álló egyenletrendszernek. A Gauss-elimináció első lépései során az alábbiakat kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 2 & 6 & 10 & 24 \\ 4 & 2 & p & 68 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & -6 & p-12 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & p & 0 \end{array}\right).$$

Két esetet érdemes megkülönböztetni aszerint, hogy p értéke 0 vagy sem. Ha $p = 0$, akkor az utolsó sort töröljük, majd a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk. A megoldás innen $x = t + 18$, $y = -2t - 2$, $z = t$, ahol t tetszőleges valós szám. Ez egy $(1, -2, 1)$ irányvektorú, és (többek közt) a $(18, -2, 0)$ ponton átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszere, bár ezt senki nem kérdezte. Ha $p \neq 0$, akkor p-vel osztva, majd a Gauss-eliminációt folytatva

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

adódik, vagyis ekkor a megoldás a $(18, -2, 0)$ pont.

13. Első megoldás. A síkok pontosan akkor metszők, ha a normálvektoraik nem párhuzamosak, ez jelen esetben $c \neq 2$ esetén teljesül. ($c = 2$-re a két sík párhuzamos (de nem azonos) lesz.) A metszetegyenes akkor és csak akkor nem lesz párhuzamos a harmadik síkkal, ha döfi, azaz pontosan egy közös pontjuk van. Azt kell tehát megvizsgálnunk, hogy ($c \neq 2$ esetén) a három síknak mikor nem lesz pontosan egy közös pontja (hiszen a metszetegyenes épp az első két sík közös pontjainak halmaza). Magyarán a három síkegyenletből kapott egyenletrendszer megoldásainak számára vagyunk kíváncsiak. Az egyenletrendszer

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ c & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & c & 5 \end{array}\right).$$

A megoldások számához elég a bal oldali mátrix determinánsát vizsgálni: ha a determináns 0, akkor nulla vagy végtelen sok megoldás lesz, ha nem 0, akkor pontosan egy. A determinánst kifejtési tétellel (vagy máshogy, a Gauss-elimináció most körülményes) kiszámítva $-2c^2 + 10c - 12$ adódik, ez $c = 2$ és $c = 3$ esetén lesz 0, az előbbit kizártuk, a megoldás tehát $c = 3$.

Második megoldás. Az első két sík $c \neq 2$ esetén metsző, a metszetegyenes egy irányvektora a két sík normálvektorainak vektoriális szorzata, azaz

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ c & 4 & 2 \end{vmatrix} = (0, c-2, 4-2c).$$

Az egyenes pontosan akkor lesz párhuzamos a harmadik síkkal, ha az irányvektora merőleges a sík normálvektorára, azaz a $(0, c-2, 4-2c) \cdot (3, 6, c)$ skaláris szorzat 0. A skaláris szorzat $0 \cdot 3 + (c-2) \cdot 6 + (4-2c) \cdot c = -2c^2 + 10c - 12$, ez $c = 2$ és $c = 3$ esetén lesz 0, az előbbit kizártuk, a megoldás tehát $c = 3$.

Harmadik megoldás. A metszet vizsgálatához Gauss-elimináljuk a két síkegyenletből álló egyenletrendszert:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ c & 4 & 2 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4-2c & 2-c & 4-3c \end{array}\right).$$

Ha $4 - 2c = 0$, azaz $c = 2$, akkor tilos sort kapunk (mivel $2 - c$ is 0, $4 - 3c$ viszont nem), azaz ekkor nem lesz metsző a két sík. Ellenkező esetben oszthatunk $(4 - 2c)$-vel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{4-3c}{4-2c} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 - \frac{4-3c}{2-c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{4-3c}{4-2c} \end{array}\right).$$

Innen a megoldás $x = 3 - \frac{4-3c}{2-c}$, $y = -\frac{1}{2}t + \frac{4-3c}{4-2c}$, $z = t$, tetszőleges t valós számra. Ez egy egyenes paraméteres egyenletrendszere, melynek irányvektora $(0, -\frac{1}{2}, 1)$ (ennek kiszámításához a redukált lépcsős alak jobboldalára nincs is szükség). Az egyenes akkor lesz párhuzamos a harmadik síkkal, ha az irányvektora merőleges a sík normálvektorára, azaz a $(0, -\frac{1}{2}, 1) \cdot (3, 6, c)$ skaláris szorzat 0. A skaláris szorzat $0 \cdot 3 + -\frac{1}{2} \cdot 6 + 1 \cdot c = c - 3$, a megoldás tehát $c = 3$.

14. A síkok egy-egy normálvektora előáll (például) az AC és BC, illetve DC és EC vektorok vektoriális szorzataként. A vektoriális szorzatokat determináns segítségével kiszámítva az első sík egy normálvektorának $(2, -1, 1)$, a második sík egy normálvektorának $(2, 6, -7)$ adódik. Ezek a vektorok merőlegesek a keresett irányvektorra és egymással nem párhuzamosak, tehát a vektoriális szorzatuk párhuzamos a keresett vektorral. A vektoriális szorzatot determináns segítségével kiszámítva (egy lehetséges) megoldásként az $(1, 16, 14)$ vektor adódik.

Természetesen vektoriális szorzás nélkül is megoldható a feladat: meghatározhatjuk a két sík egyenletét, majd az e két egyenletből álló rendszer megoldásait, ezek lesznek a metszetegyenes pontjai. Innen az irányvektor (a 12. feladat megoldásánál és a 13. feladat harmadik megoldásánál látottak szerint) leolvasható, de az is jó, ha keresünk két konkrét megoldást, a különbségük az egyenes irányvektora lesz. Mivel a C pont nyilván rajta van a metszetegyenesen, valójában elég egy ettől különböző megoldást megtalálnunk.

15. Első megoldás. Az egyenes irányvektora $(4, 8, 16)$, a sík normálvektora $(0, 2, 1)$, skaláris szorzatuk $(4, 8, 16) \cdot (0, 2, 1) = 32$, vagyis a két vektor nem merőleges, így az egyenes nem párhuzamos a síkkal, tehát pontosan egy közös pontjuk van.

Második megoldás. Keressük meg a metszésponto(ka)t, vagyis oldjuk meg az egyenes egyenleteiből és a sík egyenletéből álló rendszert. Ennek legegyszerűbb módja, ha a paraméteres egyenletrendszer egyenleteit a sík egyenletébe írva meghatározzuk t-t: $p = 2y+z = 2(8t+1)+(16t+1) = 32t+3$, innen $t = \frac{p-3}{32}$. Mivel ezzel az x, y, z értékeket is egyértelműen meghatároztuk (a paraméteres egyenletrendszer egyenleteit használva), minden p értékre pontosan egy közös pont lesz.

Megjegyzés. Láttuk, hogy a közös pontok száma p értékétől független. Ennek az az oka, hogy p a sík normálvektorát nem befolyásolja, csak azt, hogy a $(0, 2, 1)$ normálvektorú párhuzamos síkok közül melyikről van szó, továbbá a sík és az egyenes nem párhuzamos. Ha a sík és az egyenes párhuzamosak lennének, akkor p is szerephez jutna: p határozná meg, hogy az egyenes benne van-e a síkban (amikor is végtelen sok közös pont lenne) vagy sem (mely esetben nem lenne közös pont).

16. Legyen a keresett egyenes e, az irányvektora pedig (a, b, c). Mivel e és f merőleges, az irányvektoraik skaláris szorzata 0, azaz $(a, b, c) \cdot (1, 1, 0) = a + b = 0$. Mivel e átmegy az origón, (egyik) paraméteres egyenletrendszere

$$x = at',\ y = -at',\ z = ct'.$$

Az egyenesek (x, y, z) metszéspontjára mindkét paraméteres egyenletrendszer teljesül (nem feltétlenül azonos paraméterrel, ezért is jelöltük a második rendszer paraméterét t'-vel), tehát egyfelől (e miatt) $x+y = 0$, másfelől (f miatt) $x+y = 2t+3$, ahonnan $t = -\frac{3}{2}$, ebből pedig $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = -1$. Mivel ez a pont és az origó is rajta van e-n, a $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$ vektor irányvektora e-nek, innen a keresett paraméteres egyenletrendszer

$$x = -\frac{1}{2}t',\ y = \frac{1}{2}t',\ z = -t'.$$

17. Jelölje az adott egyenest e, a keresett egyenest f. e egy irányvektora $\underline{v}(1, 3, -4)$, egy pontja $Q(3, 2, -1)$. A P-n átmenő, $\underline{v}$ normálvektorú S sík e-vel vett M metszéspontja épp f és e metszéspontja. S egyenlete felírható $\underline{v}$-ből és P-ből: $x + 3y - 4z = 1 \cdot 12 + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 7 = -13$. M az $x - 3 = \frac{y-2}{3} = \frac{-z-1}{4}$, $x + 3y - 4z = -13$ egyenletrendszer megoldásával kapható. Kifejezve: $y = 3x - 7$, $z = -4x + 11$; ezeket behelyettesítve és rendezve: $x = 2$. Ebből $y = -1$, $z = 3$. Vagyis megkaptuk M-et: $M(2, -1, 3)$. f-nek $\overrightarrow{MP}$ irányvektora. Ez megkapható a P-be, illetve M-be mutató helyvektorok különbségeként: $\overrightarrow{MP}(10, 2, 4)$. (Ennek a fele is használható irányvektornak: $(5, 1, 2)$.) Az irányvektor és P (vagy M) segítségével felírható f: $\frac{x-12}{5} = y - 1 = \frac{z-7}{2}$. (Vagy ugyanez M-et használva: $\frac{x-2}{5} = y + 1 = \frac{z-3}{2}$.)

Megjegyzés. A feladat a következő ötlettel is megoldható: a fenti megoldás jelöléseit használva, legyen $\underline{v}_0$ a $\underline{v}$-vel azonos irányú, egység hosszú vektor. (Azaz $\underline{v}_0 = (\frac{1}{\sqrt{26}}) \cdot \underline{v}$.) Ekkor a $\underline{v}_0 \cdot \overrightarrow{QP}$ skaláris szorzat értéke (definíció szerint) épp a $\overrightarrow{QM}$ vektor hossza. Így $(\underline{v}_0 \cdot \overrightarrow{QP}) \cdot \underline{v}_0 = \overrightarrow{QM}$. Ebből pedig $\overrightarrow{QM}$, majd M könnyen meghatározható.

18. Első megoldás. A két egyenes akkor kitérő, ha se nem párhuzamosak, se nem metszők. Párhuzamosak akkor lesznek, ha az irányvektoraik párhuzamosak. Az AB egyenes (egyik) irányvektora $(3, 1, 3)$, a CD egyenes (egyik) irányvektora $(6, 2, p-3)$. Ezek pontosan akkor párhuzamosak, ha létezik olyan c valós szám, melyre $c \cdot (3, 1, 3) = (6, 2, p-3)$. Világos, hogy ez pontosan ($c = 2$ és) $p = 9$ esetén teljesül. Ha a két egyenes nem párhuzamos, akkor meg kell még vizsgálni, hogy metszők-e. Ehhez célszerű felírni a két egyenes egyenletrendszerét: AB (egyik) paraméteres egyenletrendszere az $x = 3t+1$, $y = t+1$, $z = 3t+2$ egyenletekből, CD (egyik) paraméteres egyenletrendszere pedig az $x = 6s + 4$, $y = 2s$,$z = (p - 3)s + 3$ egyenletekből áll. Innen AB (nem paraméteres) egyenletrendszere $\frac{x-1}{3} = y - 1 = \frac{z-2}{3}$, CD (nem paraméteres) egyenletrendszere pedig $\frac{x-4}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{p-3}$, ha $p \neq 3$, illetve $\frac{x-4}{6} = \frac{y}{2}$, $z = 3$, ha $p = 3$. Könnyen kiszámítható, hogy a két egyenletrendszernek egyik esetben sem lesz megoldása, vagyis a két egyenes soha nem lesz metsző. Az egyenesek tehát pontosan akkor kitérők, ha $p \neq 9$.

Második megoldás. A két egyenes akkor nem kitérő, ha az A, B, C, D pontok egy síkban vannak. Az ABC síknak normálvektora lesz az $AB = (3, 1, 3)$ és az $AC = (3, -1, 1)$ vektorok vektoriális szorzata, azaz

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

ahol $\underline{i}$, $\underline{j}$, és $\underline{k}$ az x, y, illetve z irányú egységvektorok. A kifejtési tétellel a determinánst kiszámítva a $(4, 6, -6)$ vektor adódik normálvektornak. Innen a sík egyenlete $2x+3y-3z = d$, d értékére a sík egy tetszőleges pontját (pl. A-t) behelyettesítve a -1-et kapjuk. A D csúcs akkor lesz a síkban, ha a kapott egyenlet teljesül a koordinátáira, azaz $2 \cdot 10 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot p = -1$. Innen $p = 9$, az egyenesek tehát akkor és csak akkor kitérők, ha $p \neq 9$.

19. A kérdéses halmaz nem zárt az összeadásra, mert pl.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bal szélső 3×3-as részmátrixának determinánsa nem 0, hanem 2, így a struktúra nem vektortér.

Megjegyzés. Az összeadásra vonatkozó zártságra persze még rengeteg ellenpélda van, a skalárral szorzásra viszont zárt lesz a struktúra, hiszen egy 0 determinánsú mátrix minden elemét ugyanazzal a számmal szorozva 0 determinánsú mátrixot kapunk.

20. A kérdéses halmaz nem zárt az összeadásra, mert pl.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nem tartalmaz legalább 11 darab 0-t (hanem csak 7-et), így a struktúra nem vektortér.

Megjegyzés. Az összeadásra vonatkozó zártságra persze itt is rengeteg ellenpélda van, a skalárral szorzásra viszont ez a struktúra is nyilván zárt.

21. Eredmény: nem, az összeadásra nem lesz zárt.

22. Eredmény: igen, ehhez elég a zártságokat belátni.

23. Eredmény: nem, az összeadásra nem lesz zárt.

24. Eredmény: igen, ehhez elég a zártságokat belátni.

25. Eredmény: nem, az összeadásra nem lesz zárt.

26. A 2×3-as mátrixok a szokásos mátrixösszeadás és skalárral szorzás műveletekkel vektorteret alkotnak, a kérdéses struktúra tehát akkor és csak akkor lesz vektortér, ha ennek a térnek az altere. M akkor és csak akkor altér, ha zárt az összeadásra és a skalárral szorzásra, azaz M-beli elemek összege és számszorosa is M-beli. A skalárral szorzásra M nem zárt, például a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix M-beli, míg a -1-szerese nem, így M nem vektortér.

Megjegyzés. A megoldás persze akkor is teljes értékű, ha az altérre vonatkozó fejtegetést mellőzzük: mivel a struktúra nem zárt a skalárral szorzásra, nem lehet vektortér. A tíz vektortéraxióma közül sérül még az ellentettre vonatkozó is, természetesen ezzel is lehet érvelni.

27. Az állítás nem igaz, a struktúra ugyanis nem zárt az összeadásra: például az $(1, 1, 1)$ és $(0, 1, 0)$ számhármasokra teljesül a feltétel, az összegükre azonban nem.

28. Eredmény: igen.

29. Ismert, hogy az összes valós polinomok a szokásos műveletekkel vektorteret alkotnak, elég tehát azt ellenőriznünk, hogy a kérdéses polinomok (nevezzük a halmazukat P-nek) ennek alterét alkotják-e. Ehhez meg kell vizsgálnunk, hogy P zárt-e az összeadásra és a valós számmal szorzásra. Legyenek a tetszőleges a, illetve b polinomok harmadfokú tagjainak együtthatói a_3, illetve b_3, az ötödfokú tagok együtthatói pedig a_5, illetve b_5. Ekkor $a_3 + a_5 = 0$ és $b_3 + b_5 = 0$. A $c = a + b$ polinom harmadfokú tagjának együtthatója $c_3 = a_3 + b_3$, ötödfokú tagjának együtthatója $c_5 = a_5 + b_5$. $c_3 + c_5 = a_3 + b_3 + a_5 + b_5 = 0$, vagyis az $a + b$ polinom is P-beli. Tetszőleges λ valós számra a $d = \lambda a$ polinom harmadfokú tagjának együtthatója $d_3 = \lambda a_3$, ötödfokú tagjának együtthatója $d_5 = \lambda a_5$. $d_3 + d_5 = \lambda a_3 + \lambda a_5 = 0$, tehát a d polinom is P-beli, azaz P a szokásos műveletekkel vektorteret alkot.

Megjegyzés. Természetesen közvetlenül is belátható, hogy P vektortér a szokásos műveletekkel, ehhez mind a tíz axiómát ellenőrizni kell.

30. V nem vektortér, mert például a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ választással $1 \odot \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, azaz nem teljesül a vektortér definíciójában szereplő $1 \odot \underline{v} = \underline{v}$ axióma.

Megjegyzés. A vektortér definícójában szereplő axiómák közül még $\lambda \odot (\mu \odot \underline{v}) = (\lambda \cdot \mu) \odot \underline{v}$ sérül, a többi teljesül.

31. A vektortér definíciójában szereplő axiómák közül nem teljesül a $(\lambda+\mu) \odot \underline{v} = \lambda \odot \underline{v} \oplus \mu \odot \underline{v}$ axióma, mivel (például) a $\underline{v} = x^2$ és $\lambda = \mu = 1$ választással $(\lambda+\mu) \odot \underline{v} = 2 \odot x^2 = x^2$, de $\lambda \odot \underline{v} \oplus \mu \odot \underline{v} = 1 \odot x^2 \oplus 1 \odot x^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$, így V nem vektortér az $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel.

Megjegyzés. Természetesen a fenti axióma sérülésére sok más jó példa is mutatható, a vektortéraxiómák közül azonban az összes többi teljesül (ínyencek kedvéért: ez azt is jelenti, hogy a fenti axióma nem következménye a többinek).

Második megoldás. A vektortéraxiómák ismert, egyszerű következménye, hogy $0 \odot \underline{v} = \underline{0}$ teljesül bármely $\underline{v}$ vektorra. Ha a kérdéses struktúra vektortér lenne, akkor a nullvektor nyilván az azonosan 0 polinom kéne hogy legyen, így a $0 \odot x$ polinomnak az azonosan 0 polinomnak kéne lennie, ami nem áll fenn, hiszen $0 \odot x = x$.

32. A vektorok akkor és csak akkor alkotnak független rendszert, ha $\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}+\gamma\underline{c}+\delta\underline{d} = \underline{0}$ csak $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ esetén lehetséges, vagyis ha az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 9 & p & 0 \\ 0 & 3 & 6 & p+1 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek csak egy megoldása van. Gauss-eliminációt alkalmazva az egyenletrendszer az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4-p}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7p}{2} - 6 & 0 \end{array}\right)$$

alakra hozható, ahonnan látható, hogy a megoldás pontosan akkor lesz egyértelmű, ha $p \neq \frac{12}{7}$. Így a vektorok $p \neq \frac{12}{7}$ esetén alkotnak független rendszert.

33. A generált altér definíciója szerint azt kell eldönteni, hogy léteznek-e olyan α, β, γ skalárok, melyekre $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} = \underline{d}$ teljesül. Behelyettesítve $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ értékét, a

$$\begin{aligned} 3\alpha + 15\beta + 12\gamma &= 6 \\ -\alpha + 6\gamma &= 8 \\ 2\alpha + 8\beta + 7\gamma &= -9 \\ \alpha + 7\beta + p \cdot \gamma &= 12 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerre jutunk. Erre a Gauss-eliminációt alkalmazva:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 15 & 12 & 6 \\ -1 & 0 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 7 & -9 \\ 1 & 7 & p & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 10 & 10 \\ 0 & -2 & -1 & -13 \\ 0 & 2 & p-4 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & p-8 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3p-18 \end{array}\right).$$

Látható, hogy ha $3p-18 \neq 0$, akkor tilos sor keletkezik, vagyis az egyenletrendszernek nincs megoldása. Ha viszont $3p - 18 = 0$, akkor az utolsó sor elhagyható és az egyenletrendszer megoldható lesz. Így a $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ állítás pontosan akkor igaz, ha $p = 6$.

Megjegyzés. $p = 6$ esetén az elimináció folytatásával megkapható az egyenletrendszer (egyértelmű) megoldása: $\alpha = -26$, $\beta = 8$, $\gamma = -3$, a feladatban szereplő kérdés megválaszolásához azonban erre nincs szükség.

34. Első megoldás. A 4 vektor pontosan akkor alkot generátorrendszert, ha minden (d, e, f, g) valós számnégyeshez létezik olyan $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, melyekre $\alpha\underline{x} + \beta\underline{x} + \gamma\underline{z} + \delta\underline{v} = (d, e, f, g)$. Más szóval az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & c & d \\ c & c & c & 4 & e \\ c & c & 0 & 0 & f \\ c & 0 & 0 & 0 & g \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek létezik megoldása minden (d, e, f, g) valós számnégyesre. Könnyen látható, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha a bal oldali mátrix determinánsa nem 0. (Ha a determináns nem 0, akkor mindig létezik (egyértelmű) megoldás, ha viszont 0, akkor a Gauss-elimináció során keletkezik vagy tilos sor vagy csupa 0 sor. Ez utóbbi esetben a sornak megfelelő jobb oldalt megváltoztatva tilos sort kapunk, vagyis mindig lesz olyan (d, e, f, g) négyes, amire tilos sort kapunk és így nincs megoldás.) A determinánst a 4. sor szerint kifejtve, majd a kapott determinánst a 3. sor szerint kifejtve (vagy akár a definíció alapján) $c^2(c^2 - 12)$ adódik. Ez pontosan akkor lesz 0, ha $c = 0$, $c = \sqrt{12}$ vagy $c = -\sqrt{12}$. Ezen c értékekre tehát a vektorok nem alkotnak generátorrendszert, minden más c-re viszont igen.

Második megoldás. 4 vektor egy 4 dimenziós térben akkor és csak akkor alkot generátorrendszert, ha függetlenek, hiszen ha függetlenek lennének, de nem alkotnának generátorrendszert, akkor egy általuk nem generált vektorral együtt már 5 elemű független rendszert alkotnának, ami lehetetlen; másrészt ha nem lennének függetlenek, akkor egy alkalmas elemet elhagyva egy 3 elemű generátorrendszert kapnánk, ami szintén lehetetlen.

A 4 vektor pontosan akkor lesz független, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullvektort, vagyis az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & c & 0 \\ c & c & c & 4 & 0 \\ c & c & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. Ez ekvivalens azzal, hogy a bal oldali mátrix determinánsa nem 0, innen pedig az első megoldásban látottak szerint járunk el.

35. A vektorok pontosan akkor lesznek függetlenek, ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja a nullvektort, vagyis az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} c & 1 & 1 & 0 \\ 1 & c & 2 & 0 \\ 2 & 2 & c & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van. A Gauss-elimináció kellemetlennek tűnik, de ha előtte kicseréljük az első és a negyedik sort (ami a megoldáshalmazt nem változtatja meg), akkor fájdalommentes lesz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & c & 2 & 0 \\ 2 & 2 & c & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & c-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c-2 & 0 \\ 0 & 1-c & 1-c & 0 \end{array}\right).$$

Ha $c = 1$, akkor a második oszlopban nem lesz vezéregyes, vagyis semmiképp sem lehet egyértelmű a megoldás. Ha $c \neq 1$, akkor a második sort $(c-1)$-gyel osztva és a Gauss-eliminációt folytatva

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{c-1} & 0 \\ 0 & 0 & c-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-c & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{c-1} & 0 \\ 0 & 0 & c-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-c & 0 \end{array}\right).$$

Ha $c = 2$, akkor a harmadik oszlopban nem lesz vezéregyes, tehát ekkor sem lehet egyértelmű a megoldás. Ha $c \neq 2$, akkor a második sort $(c-2)$-gyel osztva és a Gauss-eliminációt folytatva az alábbi lépcsős alakot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{c-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Mivel minden oszlopban van vezéregyes, a megoldás egyértelmű, tehát a vektorok akkor és csak akkor lesznek függetlenek, ha $c \neq 1$ és $c \neq 2$.

36. Első megoldás. A két megadott vektor független rendszert alkot (ha nem így lenne, akkor természetesen nem is lehetne őket bázissá kiegészíteni), olyan harmadik vektort kell keresnünk, amelyet a rendszerhez véve az független marad, hiszen 3 független vektor egy 3 dimenziós térben bázist kell, hogy alkosson. Legyen a harmadik vektor (a, b, c), ekkor arra lesz szükségünk, hogy a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & a & 0 \\ 5 & 2 & b & 0 \\ 2 & 3 & c & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszernek csak egy megoldása legyen (azaz a 3 vektornak csak a triviális lineáris kombinációja adja a nullvektort). Ez azzal ekvivalens, hogy a baloldali 3×3-as mátrix determinánsa nem 0. A determinánst kifejtési tétellel kiszámítva (a harmadik oszlop szerint kifejtve) $11a + b - 19c$ adódik, minden olyan a, b, c hármas jó lesz, amire ez a kifejezés nem 0. Ha nincs kedvünk a kifejtési tételt használni (vagy még nem tanultuk), akkor használhatjuk a definíciót is (esetleg a Sarrus-szabályt, de csak ha megígérjük, hogy kizárólag 3×3-as mátrixokra fogjuk alkalmazni és nem rontjuk el), vagy intelligens próbálgatást is alkalmazhatunk: a $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ vektorok valamelyike biztosan jó lesz harmadiknak, hiszen nem lehet mindegyikük benne a két adott vektor síkjában (most történetesen mind a három jó lesz).

Második megoldás. Egy kételemű (független) halmazt kell egy három dimenziós tér bázisává kiegészíteni, tehát pontosan egy plusz vektorra lesz szükség. Ez a vektor bármi lehet, ami nincs benne a két megadott vektor által generált altérben (ami egy sík), hiszen ekkor a három vektor együtt legalább 3 dimenziós alteret generál, ez pedig csak maga $\mathbb{R}^3$ lehet. Ilyen vektort sokféleképp kaphatunk, a leggyorsabb talán a két adott vektor vektoriális szorzatát tekinteni, ami merőleges mindkét vektorra, így természetesen nincs benne az általuk meghatározott síkban. A vektoriális szorzatot determináns segítségével kiszámítva a $(11, 1, -19)$ vektort kapjuk.

Ha már úgyis megvan a vektoriális szorzat, akkor akár fel is írhatjuk a két megadott vektor által generált sík egyenletét (amit az első megoldásban is megkaptunk): $11x + y - 19z = 0$ (a jobboldali 0 onnan jön, hogy az origő benne van a síkban). Minden olyan vektor jó lesz harmadiknak, ami nincs a síkban, azaz amire az egyenlet nem teljesül. A sík egyenletét természetesen vektoriális szorzás és determináns használata nélkül is megkaphatjuk, például úgy, hogy felvesszük 3 pontját (mondjuk a két megadott vektort és az origót), majd megoldjuk az így adódó egyenletrendszert.

37. A kilenc közös vektor egy 9 dimenziós teret feszít, amiben a nem közös vektorok egyike sincs benne. Ebből azonban nem következik, hogy ezek egymás számszorosai, hiszen legyen pl. a tér az $\mathbb{R}^{10}$, a kilenc közös vektor a szokásos bázis első kilenc vektora, a nem közös vektorok pedig a szokásos bázis tizedik vektora, illetve (mondjuk) a szokásos bázis vektorainak összege. Könnyen látható, hogy így valóban két bázist kapunk, a két nem közös vektor pedig nyilván nem egymás számszorosa.

38. Például az $\mathbb{R}^4$ térben a szokásos $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$ bázis és az $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)$ bázis ilyenek lesznek.

41. Elég megmutatni, hogy a kérdéses vektorhalmaz (a továbbiakban B) generátorrendszer, hiszen ekkor (például) a kicserélési tétel miatt független is kell legyen. (Cseréljük ki az adott bázis elemeit egyesével B elemeire.) Mivel

$$4(\underline{b_1} + \underline{b}) - (\underline{b_2} + \underline{b}) - (\underline{b_3} + \underline{b}) - (\underline{b_4} + \underline{b}) = 5\underline{b_1},$$

$\underline{b_1}$ előáll B elemeinek lineáris kombinációjaként. Ugyanígy látható, hogy $\underline{b_2}, \underline{b_3}$ és $\underline{b_4}$ is előáll B elemeinek lineáris kombinációjaként. Mivel B egy bázis minden elemét generálja, maga is generátorrendszer.

Megjegyzés. Természetesen megoldható a feladat úgy is, hogy B függetlenségét bizonyítjuk, és ebből vonjuk le azt a következtetést, hogy generátorrendszer is (az elemszáma miatt), illetve a két tulajdonságot egymástól fügetlenül, külön-külön is beláthatjuk.

42. Eredmény: igen.

43. Eredmény: igen.

44. Eredmény: igen.

46. a) Az állítás biztosan hamis. Ugyanis ha $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$ igaz volna, akkor $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ is teljesülne (hiszen ha $\underline{c} = \alpha\underline{a} + \delta\underline{d}$, akkor $\underline{c} = \alpha\underline{a} + \delta\underline{d} + 0 \cdot \underline{b}$).

b) Az állítás biztosan igaz. Ugyanis $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ miatt tudjuk, hogy létezik a $\underline{d} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}$ lineáris kombináció. Itt $\gamma = 0$ kell teljesüljön, ellenkező esetben átrendezéssel $\underline{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\underline{a} - \frac{\beta}{\gamma}\underline{b} + \frac{1}{\gamma}\underline{d}$ adódna, vagyis $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ következne. Ezért $\underline{d} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$, vagyis $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ valóban igaz.

c) Az állítás lehet igaz is és hamis is. Legyen először V a szokásos (3 dimenziós) tér, legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a három tengelyirányú egységvektor, valamint legyen $\underline{d} = \underline{a}$. Ekkor $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ igaz (hiszen $\underline{d} = 1 \cdot \underline{a}$). Továbbá $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ is teljesül (hiszen $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ elemei az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített sík vektorai). Ebben az esetben a $\underline{b} \in \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás hamis (mert $\langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ elemei az $\underline{a}$ és $\underline{c}$ által kifeszített sík vektorai). Másodszor legyen $\underline{a}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ ugyanaz, mint a fenti példában, de legyen $\underline{b} = \underline{a}$. Ekkor $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ változatlanul igaz és $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ is megint teljesül (mert $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ csak az $\underline{a}$ skalárszorosaiból áll). Ám ebben az esetben a $\underline{b} \in \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás már igaz (hiszen $\underline{b} = 1 \cdot \underline{a}$).

47. Megmutatjuk, hogy $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{100}$ generátorrendszer V-ben; ebből következni fog, hogy bázis is (hiszen a feladat szerint lineárisan független), ebből pedig következik, hogy $\dim V = 100$. Legyen $\underline{u} \in V$ tetszőleges vektor; azt kell megmutatnunk, hogy $\underline{u}$ kifejezhető a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok egy lineáris kombinációjaként. Felhasználva a feladat feltételét $\underline{u}$-ra: léteznek olyan $\alpha_1, \ldots, \alpha_{100}$ skalárok, amelyekre a $\underline{v}_1 + \alpha_1\underline{u}, \ldots, \underline{v}_{100} + \alpha_{100}\underline{u}$ vektorok lineárisan összefüggők. Vagyis léteznek olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_{100}$ skalárok, hogy ezek nem mindegyike 0 és

$$\lambda_1(\underline{v}_1 + \alpha_1\underline{u}) + \lambda_2(\underline{v}_2 + \alpha_2\underline{u}) + \ldots + \lambda_{100}(\underline{v}_{100} + \alpha_{100}\underline{u}) = \underline{0}.$$

Beszorzás, átrendezés és kiemelés után:

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \lambda_2\underline{v}_2 + \ldots + \lambda_{100}\underline{v}_{100} + (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_{100}\alpha_{100})\underline{u} = \underline{0}.$$

Legyen $\beta = \lambda_1\alpha_1 + \ldots + \lambda_{100}\alpha_{100}$. Ekkor $\beta \neq 0$, különben a fenti egyenlőségből

$$\lambda_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda_{100}\underline{v}_{100} = \underline{0}$$

adódna, ellentmondásban $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{100}$ lineáris függetlenségével (hiszen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{100}$ nem mind 0). Így a fenti egyenlőségből átrendezés után

$$\underline{u} = -\frac{\lambda_1}{\beta}\underline{v}_1 - \frac{\lambda_2}{\beta}\underline{v}_2 - \ldots - \frac{\lambda_{100}}{\beta}\underline{v}_{100}$$

adódik, vagyis az $\underline{u}$-t előállító lineáris kombináció valóban létezik.

48. Eredmény: $x = \frac{11}{2} - \frac{13}{2}p$, $y = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}p$, $z = p$, minden $p \in \mathbb{R}$ esetén.

49. Eredmény: $t = 1$ esetén nincs megoldás, $t \neq 1$ esetén $x = 2 - \frac{10}{t-1}$, $y = 1$, $z = \frac{10}{t-1}$.

50. Eredmény: $x = 33 - 4c$, $y = -12 + 2c$, $z = -2$.

51. Eredmény: $c = 4$ esetén $x = 7 - 12p$, $y = -2 + 5p$, $z = p$, minden $p \in \mathbb{R}$-re, $c \neq 4$ esetén $x = 7$, $y = -2$, $z = 0$.

52. Eredmény: $p = \frac{1}{4}$ esetén nincs közös pont, egyébként pedig pontosan egy közös pont lesz.

53. Ismert, hogy n egyenletből álló, n ismeretlenes rendszernek (most épp $n = 3$) akkor és csak akkor van pontosan egy megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa nem 0, vagyis s értéke indifferens. A kérdéses determinánst Gauss-eliminációval (vagy máshogy) meghatározva $12t + 2$ adódik, tehát pontosan akkor lesz egy megoldás, ha $t \neq -\frac{1}{6}$.

Megjegyzés. Persze meg lehet oldani az egyenletrendszert Gauss-eliminációval és így kideríteni a fentieket, de ez lényegesen tovább tart.

54. Valós együtthatós egyenletrendszernek nem lehet pontosan három megoldása, hiszen a tanultak szerint a megoldások száma 0, 1 vagy végtelen sok, aszerint, hogy keletkezik-e a Gauss-elimináció során tilos sor, illetve lesz-e a lépcsős alakban olyan oszlop, ami nem tartalmaz vezéregyest. A válasz tehát az, hogy a feltétel semmilyen a és b érték mellett sem teljesül. Ez a következtetés persze levonható a Gauss-eliminációt követően is, de ez lényegesen tovább tart.

55. Eredmény: egy megoldás $t \neq -\frac{2}{3}$ esetén lesz, kettő pedig természetesen soha.

56. Eredmény: mindig pontosan egy megoldás lesz (és így persze mindig legalább egy is lesz).

Megjegyzés. Felmerülhet a kérdés, hogy miért nem függ a megoldások száma t-től. Ha a baloldalon négyzetes mátrix van, akkor a megoldások száma a mátrix determinánsától, illetve (ha a determináns 0) a jobboldaltól függ. Ha a t-hez tartozó előjeles aldetermináns értéke 0, akkor a determináns értéke, és így a megoldások száma független t-től.

57. Gauss-eliminációval az egyenletrendszer az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & c-3 & c & c-3 \end{array}\right)$$

alakra hozható. Ha $c \neq 3$, akkor a harmadik sort $(c-3)$-mal osztva és a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{c}{c-3} - 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 - \frac{c}{c-3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c}{c-3} & 1 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk, ahonnan a megoldás: $x = (8 - \frac{c}{c-3})p$, $y = 1 + (\frac{c}{c-3} - 4)p$, $z = 1 - \frac{c}{c-3}p$, $w = p$, ahol p tetszőleges valós szám.
Ha $c = 3$, akkor az alsó sorban jobbra lépve majd $c = 3$-mal osztva és a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk, ahonnan a megoldás: $x = p - 1$, $y = 2 - p$, $z = p$, $w = 0$, ahol p tetszőleges valós szám.

58. Gauss-eliminációval az egyenletrendszer az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4-c & -2 & 4-c \\ 0 & 0 & -c & c-4 & -c \end{array}\right)$$

alakra hozható. Ha $c \neq 0$, akkor a harmadik sort c-vel osztva és a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & c+\frac{8}{c}-4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -c-\frac{16}{c}+6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{c}-1 & 1 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk, ahonnan a megoldás: $x = (-c - \frac{8}{c} + 4)p$, $y = (c + \frac{16}{c} - 6)p$, $z = 1 - (\frac{4}{c} - 1)p$, $w = p$, ahol p tetszőleges valós szám. Ha $c = 0$, akkor az alsó sorban jobbra lépve majd -4-gyel osztva és a Gauss-eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk, ahonnan a megoldás: $x = 2p - 2$, $y = 4 - 4p$, $z = p$, $w = 0$, ahol p tetszőleges valós szám.

60. Eredmény: 17.

61. A kérdéses mátrix épp a BA mátrix inverze (hiszen $(A^{-1}B^{-1})(BA) = (A^{-1}(B^{-1}B))A = (A^{-1}I)A = A^{-1}A = I$.) A BA szorzatra $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ adódik, ennek inverzét Gauss-eliminációval kiszámítva az eredmény $\begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Megjegyzés. Persze az inverzeket külön-külön is ki lehet számítani, majd összeszorozni, de ez valamivel tovább tart és több (számolási) hibalehetőséget rejt magában.

62. Ismert, hogy az $\overrightarrow{OA}(0;1;-2)$, $\overrightarrow{OB}(1;1;5)$, $\overrightarrow{OC}(1;3;-1)$ vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogata az alábbi determináns értékének abszolút értéke:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Gauss-eliminációval számolva a következőket kapjuk:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

Így a parallelepipedon térfogata 2.

63. a) A feladatbeli két mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrix i. sora $\begin{pmatrix} i+1 & i+2 & 6-i & 5-i \end{pmatrix}$, a B mátrix j. oszlopa $\begin{pmatrix} j & 1-j & j & 1-j \end{pmatrix}^T$ minden $1 \leq i,j \leq 4$ esetén. Így az $A \cdot B$ mátrix i. sorának és j. oszlopának kereszteződésében álló elem: $(i+1)j + (i+2)(1-j) + (6-i)j + (5-i)(1-j) = ij + j + i + 2 - ij - 2j + 6j - ij + 5 - i - 5j + ij = 7$. A 4×4-es $A \cdot B$ mátrixnak tehát minden eleme 7.

b) $\det(A \cdot B) = 0$, hiszen $A \cdot B$ minden eleme (így minden sora) egyenlő. A determinánsok szorzástétele miatt $\det(B \cdot A) = \det(A \cdot B)$ (mindkét oldal $\det A \cdot \det B$-vel egyenlő), ezért

$\det(B\cdot A)=0$. Természetesen hivatkozhatunk arra is, hogy $\det B=0$ (mert B-nek vannak azonos sorai), ebből is következik a determinánsok szorzástétele szerint $\det(B\cdot A)=0$. Sőt, a szorzástétel nélkül is könnyen megoldható a feladat: B első és harmadik sorának egyenlőségéből ugyanez következik $B\cdot A$-ra is, ahonnan $\det(B\cdot A)=0$.

64. Eredmény:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

65. A determináns idevágó tulajdonsága alapján $\det(A')=\lambda\det(A)$, ugyanezen alaptulajdonság és a mátrixok skalárral szorzásának definíciója szerint $\det(\lambda A)=\lambda^9\det(A)$. Mivel $\det A\neq 0$, ebből $\lambda=\lambda^9$ következik. $\lambda^9-\lambda=\lambda(\lambda^8-1)$, így a megoldások 0,1 és -1.

67. Ha nemnulla szorzatot szeretnénk kiválasztani, akkor a harmadik sorból csak a 4-et választhatjuk; így az ötödik sorból a 8-at már nem, csak az 5-öt választhatjuk (mert a negyedik oszlopból már vettünk elemet); hasonlóan folytatva, az első sorból csak a 2-t, ezért a másodikból csak az 1-et, végül a negyedikből csak a 3-at választhatjuk. Így egyetlen nemnulla szorzat keletkezik: $2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 5$. Ehhez az egyetlen nemnulla szorzathoz tartozó permutáció az 5,2,4,3,1 (hiszen az első sorból a 5. elemet vettük, a másodikból a 2.-at, stb). Ennek a permutációnak az inverziószáma 8 (hiszen 8 inverzióban álló pár van: $(5,2)$, $(5,4)$, $(5,3)$, $(5,1)$, $(2,1)$, $(4,3)$, $(4,1)$, $(3,1)$). Mivel az inverziószám páros, ezért a szorzathoz tartozó előjel: $+$.

68. A mátrixszorzás definíciója alapján $\underline{y}$ csak 4 hosszú sorvektor lehet. Az $\underline{y}=(y_1,y_2,y_3,y_4)$ változókat bevezetve, ezekre az alábbi lineáris egyenletrendszer adódik:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 5 & 10 & 25 & 5 & 20 \\ 3 & 8 & 19 & -3 & 16 \\ 2 & 7 & 16 & -7 & t \end{array}\right)$$

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & t-8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-14 \end{array}\right)$$

Ha $t\neq 14$, akkor tilos sort kapunk, így nincs megoldás (és így a keresett $\underline{y}$ sem létezik). Ha viszont $t=14$, akkor a harmadik sor elhagyható és az elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Így a $t=14$ esetben végtelen sok megoldás van: $\underline{y}=(-\alpha-7\beta;2-2\alpha+3\beta;\alpha;\beta)$, ahol $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméterek.

69. Eredmény: 0.

70. Első megoldás. A rangfogalmak egyenlősége miatt A-nak létezik olyan 3×3-as B részmátrixa, melynek a determinánsa nem 0. Bármely olyan részmátrix, amely B-t tartalmazza, pontosan 3 rangú lesz, hiszen a rangja legalább 3, ennél nagyobb viszont nem lehet (hiszen akkor A rangja is nagyobb lenne, mint 3), a válasz tehát igen (sőt, legalább 30 ilyen lesz).

Második megoldás. 3 rangú 4×8-as részmátrixot nem nehéz találni. A-nak van 3 független sora, a többi sor pedig elő kell hogy álljon ezek lineáris kombinációjaként. A maradék 3 sorból tehát bármelyiket hozzávéve a 3 független sorhoz 3 rangú mátrixot kapunk. Ebből kéne most elhagyni 2 oszlopot úgy, hogy a rang ne változzon. Ez sem nehéz: lesz 3 oszlop, ami független, a maradék oszlopok pedig ezeknek lesznek lineáris kombinációi. A maradékból 2 oszlopot elhagyva tehát a rang nem fog változni, így 4×6-os, 3 rangú részmátrixot kapunk.

71. A második sor kétszeresét a harmadik sorból kivonva a

$$\begin{vmatrix} c & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2c-10 \end{vmatrix}$$

determinánst kapjuk, amit a harmadik sor szerint kifejtve $0-(5c-3)+(2c-10)(c-2) = 2c^2-19c+23$ adódik. Természetesen számos más módszerrel is megkapható az eredmény.

73. Igaz, az az 5 sorból és 3 oszlopból álló mátrix, amiben az utolsó három sor által alkotott négyzetes részmátrix B inverze, a többi elem pedig 0, jó lesz.

74. Igaz, $A^{-1}B$ jó lesz.

75. A második és a harmadik sort megcseréljük, majd a mátrixot Gauss-eliminháljuk a lépcsős alak eléréséig (ezek a rangon nem változtatnak), a rang a lépcsős alakban szereplő vezéregyesek száma lesz. Az elimináció során az

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c-2 \end{pmatrix}$$

mátrixhoz jutunk. Ha $c = 2$, akkor az utolsó sor csupa 0-ból áll és így elhagyható, ekkor a lépcsős alakban a vezéregyesek száma 2, ha $c \neq 2$, akkor (a harmadik sort $(c-2)$-vel osztva) a lépcsős alakban a vezéregyesek száma 3.

A rang természetesen Gauss-elimináció nélkül is kiszámítható, például a független oszlopok maximális számát meghatározva: mivel az első két oszlop független, ez a szám 2 vagy 3 lehet, az előbbi pontosan akkor, ha a három oszlopvektor összefüggő, ami (mivel az első két oszlop független) azzal ekvivalens, hogy a harmadik oszlop az első kettő lineáris kombinációja.

76. A rang kiszámítására a Gauss-eliminációt alkalmazzuk (a feladatbeli mátrix-szal indítva):

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 10 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & -10 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & p-10 & p-2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & p & p+4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4-p \end{pmatrix}$$

Ha $p = 4$, akkor az utolsó sor csupa 0 sor, így elhagyható. Ekkor a vezéregyesek száma a kapott lépcsős alakban 3, így a mátrix rangja is ennyi. Ha $p \neq 4$, akkor az utolsó sor $(4-p)$-vel osztása után kapjuk a lépcsős alakot. Ekkor a vezéregyesek száma, és ezzel a mátrix rangja is 4.

77. Eredmény: $x = 1$ esetén a rang 1, $x = -2$ esetén a rang 2, minden más esetben pedig 3.

80. Első megoldás. Az A mátrix determinánsa a harmadik oszlop szerint kifejtve $-1-n$. A determinánsok szorzástétele szerint így $\det A^{-1} = \frac{-1}{n+1}$, ha az A^{-1} mátrix létezik. Ez $n=0$ és $n=-2$ esetén lehet csak egész és az utóbbi esetben lesz csak pozitív egész. Az

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

mátrix inverzét Gauss-eliminációval a szokásos módon meghatározva a

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 & -3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk.

Második megoldás. Az A mátrix inverzét Gauss-eliminációval határozzuk meg. Az első fázis végén az egyenletrendszer az

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & n+1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

alakot ölti. Ahhoz, hogy A invertálható legyen, n tehát nem lehet -1. $0 \neq (n+1)$-gyel osztva, majd a Gauss-eliminációt folytatva, inverzként a

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{n+1}-3 & -\frac{6}{n+1}+2 & \frac{3}{n+1} \\ -\frac{2}{n+1}+2 & \frac{4}{n+1}-1 & -\frac{2}{n+1} \\ \frac{1}{n+1} & -\frac{2}{n+1} & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

mátrix adódik. A determináns kiszámításához a harmadik sor kétszeresét a második sorhoz adva, háromszorosát pedig az első sorból levonva a

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{1}{n+1} & -\frac{2}{n+1} & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk, melynek determinánsa (ami egyenlő A^{-1} determinánsával) a harmadik oszlop szerint kifejtve $-\frac{1}{n+1}$. Ez $n=0$ és $n=-2$ esetén lehet csak egész és az utóbbi esetben lesz csak pozitív egész. Az inverz mátrix az $n=-2$ behelyettesítéssel:

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 & -3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

81. Jelölje A oszlopait $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{100}$. A feladat állítása nem más, mint hogy minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^{50}$ kifejezhető az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{100}$ vektorokból lineáris kombinációval, vagyis hogy $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{100} \rangle = \mathbb{R}^{50}$. Ismert, hogy $\mathrm{r}(A) = \dim\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{100} \rangle$. Így $\mathrm{r}(A) = \dim \mathbb{R}^{50}$. Mivel $\dim \mathbb{R}^n = n$ bármely pozitív egész n-re, $\mathrm{r}(A) = 50$.

83. A rang a lineárisan független sorok maximális száma, tehát a mátrixnak van három független sora, de a maradék hét sor mindegyike e három sor valamely lineáris kombinációja (ez azért igaz, mert bármely negyediknek választott sor és a három független sor együtt összefüggő rendszert alkot, azaz létezik nem triviális lineáris kombinációjuk, ami a nullvektort adja és ebben a negyedik vektor együtthatója nem lehet 0). Ha közülük valamelyikben nem változtatnánk meg legalább egy elemet, akkor ez így is maradna, ekkor viszont a rang nem lehetne 10.

84. Eredmény: Az a) állítás nem teljesül mindig, a többi igen.

85. A mátrixszorzás mátrixösszeadás feletti disztributivitása miatt $(A-B)\underline{x} = A\underline{x}-B\underline{x} = \underline{0}$, vagyis az $A-B$ mátrix oszlopainak az $\underline{x}$ koordinátáival, mint együtthatókkal vett lineáris kombinációja a nullvektor. Mivel $\underline{x}$ nem minden koordinátája 0, az $A-B$ mátrix oszlopai lineárisan összefüggők, ahonnan $\det(A-B) = 0$ következik (például az oszloprang és a determinánsrang egyenlősége miatt).

86. Tegyük fel indirekten, hogy A sorai nem függetlenek. Ekkor A rangja legfeljebb 2 lehet, így semelyik 3 oszlopa sem lenne független, más szóval A oszlopai legfeljebb 2 dimenziós teret generálnának. Ismert, hogy az AB mátrix oszlopai előállnak az A oszlopainak lineáris kombinációiként, így AB oszlopai mind benne vannak az A oszlopai által generált térben, így AB-nak legfeljebb 2 független oszlopa lehet, hiszen k dimenziós térben legfeljebb k vektor alkothat független rendszert. Ez ellentmondás, hiszen a 3×3-as egységmátrixnak 3 független oszlopa van.

87. A nullmátrix és az egységmátrix ilyenek, a rang tehát lehet 0 és 2 is. 1 rangú példa (mondjuk) az $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix. 2-nél nagyobb (vagy 0-nál kisebb, illetve nem egész) számok természetesen szóba sem jöhetnek.

88. A σ permutációban az utolsó 99 helyen álló számok a σ' permutációban változatlan sorrendben szerepelnek, így a belőlük alkotott párok közül pontosan ugyanazok vannak fordított sorrendben a két permutációban. A $\sigma(1)$ szám viszont az első helyről az utolsóra kerül, így az összes többi számhoz megváltozik a viszonya. Ez 99 darab eggyel csökkenés/növelés, ami összességében páratlan változást jelent.

89. Eredmény: $(-1)^{n-1}(n-1)$.

90. Első megoldás. A $D := C$ választás megfelel a feladat feltételeinek: ha X_1 megoldása volna a $BX = D = C$ egyenletnek, X_2 pedig az $AX = B$-nek, akkor $A(X_2X_1) = (AX_2)X_1 = BX_1 = C$, azaz X_2X_1 megoldása volna $AX = C$-nek, ami lehetetlen.

Második megoldás. Könnyen látható, hogy $\det A = 0$, ellenkező esetben ugyanis létezne az A^{-1} mátrix, így $X = A^{-1}C$ megoldása volna az $AX = C$ egyenletnek (mert $A(A^{-1}C) = (AA^{-1})C = EC = C$). Ebből a determinánsok szorzástétele szerint $\det B = 0$ következik: ha X_0 megoldása az $AX = B$ egyenletnek (ami a feladat szerint megoldható), akkor $\det B = \det(AX_0) = \det A \cdot \det X_0 = 0 \cdot \det X_0 = 0$. $\det B = 0$-ból ugyanígy következik, hogy ha a $BX = D$ egyenlet megoldható, akkor $\det D = 0$. Így valóban van olyan D, amelyre $BX = D$ nem megoldható: minden nemnulla determinánsú D mátrix (például az egységmátrix) megfelel a feltételnek.

96. Ha a determináns definíció szerinti kiszámításakor nincs olyan permutáció, melyhez tartozó szorzat minden tényezője egyes, akkor a determináns nyilván 0. Megmutatjuk, hogy ha van ilyen permutáció, akkor pedig a determináns 1 vagy -1. Ekkor ugyanis a 6 egyes közül 5 úgy helyezkedik el, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy van közülük. Ha egy szorzathoz a 6. egyest akarnánk használni, akkor az említett 5 egyes közül tehát kettőt (a 6. egyes sorában és oszlopában lévőket) nem tudunk kiválasztani. Mivel így a szorzat 4 tényezője lehet csak nullától különböző, a szorzat értéke nulla. Ebből kifolyólag ekkor pontosan 1 nemnulla szorzatunk van, a determináns értéke tehát valóban 1 vagy -1.

99. A determináns definíció szerinti kiszámításakor keletkező szorzatoknak 5 tényezője lesz, így minden szorzatban lesz olyan tényező, amelyik páros, hiszen csak 4 páratlan szám szerepel a mátrixban. Ezek szerint az összes szorzat páros lesz, vagyis a determináns (ami ezen szorzatok valamilyen előjelekkel vett összege) is páros, azaz nem lehet 1.

101. Ilyen például a csupa 1-esekből álló mátrix.

102. A válasz nem. Tegyük fel ugyanis indirekten, hogy ilyen mátrix létezik és a determinánsát fejtsük ki aszerint a sor szerint, amelyben az az elem van, melyhez a nem 0 előjeles aldetermináns tartozik. Mivel itt egy kivétellel minden előjeles aldetermináns 0, a nem 0 aldeterminánshoz tartozó elem viszont nem 0, a teljes determináns értéke nem 0. Bármely más sor szerint kifejtve a determinánst azonban 0-t kapnánk (hiszen ezekben a sorokban minden elemhez 0 értékű előjeles aldetermináns tartozik), ami nyilván ellentmondás.

103. Tegyük fel, hogy a mátrix legalább 16 nullát tartalmaz. Ekkor lesz olyan S sora, melyben legalább négy darab nulla van, ellenkező esetben ugyanis minden sorban csak három nulla lehetne, így összesen csak 15 nulla lehetne a mátrixban. A determináns definíció szerinti kiszámításakor kapott $5! = 120$ szorzat közül így legfeljebb $4! = 24$ lehet nullától különböző, hiszen az S sorból legfeljebb egy nullától különböző elem választható, ami ellentmond a feladat feltételének, tehát a mátrix valóban legfeljebb 15 nullát tartalmaz.

104. Legyen A előjeles aldeterminánsainak értéke d, az i. sorban lévő elemek összege pedig s_i. Ekkor A determinánsát az i. sor szerint kifejtve $\det A = ds_i$ adódik. Ha $d = 0$, akkor $\det A = 0$ és kész vagyunk, ellenkező esetben viszont tetszőleges $1 \leq i, j \leq n$ esetén $s_i = s_j$. Adjuk most hozzá az A mátrixban az utolsó oszlophoz az összes többi oszlopot, legyen az így kapott mátrix B. Látható, hogy B utolsó oszlopában minden elem s_1, B többi eleme pedig azonos A megfelelő helyen álló elemeivel, igaz továbbá (a determináns alaptulajdonságai szerint), hogy $\det B = \det A$. Fejtsük most ki a B mátrixot az utolsó oszlopa szerint. Mivel B első $n-1$ oszlopa azonos A első $n-1$ oszlopával, a kifejtés során adódó előjeles aldeterminánsok azonos értékűek A megfelelő előjeles aldeterminánsaival, így $\det B = ds_1 + ds_1 + \ldots + ds_1 = nds_1$. Eszerint $\det A = ds_1 = nds_1$, vagyis $(n-1)ds_1 = 0$. Mivel $n-1$ nem lehet 0 (hiszen $n \geq 2$), $ds_1 = 0$, amivel az állítást beláttuk.

105. Legyen a_{ij} a mátrix egy tetszőleges eleme és jelöljük A_{ij}-vel a hozzá tartozó előjeles aldeterminánst. Az eredeti és a csere utáni mátrixot is kifejtve az i. sora szerint a determinánsokra olyan összegeket kapunk, amelyek a j. tagot leszámítva azonosak. A j. tag az A mátrixban $a_{ij}A_{ij}$, míg a csere utáni mátrixban 0. Eszerint (mivel a két összeg egyenlő) $a_{ij}A_{ij} = 0$. Beláttuk tehát, hogy bármely elemnek és a hozzá tartozó előjeles aldeterminánsnak a szorzata 0, ahonnan (bármely sor vagy oszlop szerint kifejtve A-t) azonnal következik, hogy $\det A = 0$.

107. Megmutatjuk, hogy teljesül a lineáris leképezéseket definiáló két feltétel. Nézzük először a tetszőleges (x, y) és (a, b) vektorok összegét. Ennek képe $(10(x+a)+y+b, 10(x+a)+y+b)$, ami épp a $(10x+y, 10x+y)$ vektor és a $(10a+b, 10a+b)$ vektor összege, ezek pedig az (x, y), illetve (a, b) vektorok képei, vagyis az első feltétel teljesül. Az (x, y) vektor λ-szorosának képe $(10\lambda x + \lambda y, 10\lambda x + \lambda y)$, ami épp $\lambda(10x+y, 10x+y)$, vagyis a második feltétel is teljesül, azaz a leképezés lineáris transzformáció lesz (ehhez az is kell, hogy azonos vektorterek közt hasson, de ez a feladat szövegéből kiderül).

108. A képtérben nyilván csak az $x = y$ egyenes pontjai lehetnek, hiszen minden képként előálló vektornak azonosak a koordinátái, ezek viszont mind benne is lesznek a képtérben (hiszen bármilyen x számhoz találunk olyan a-t és b-t, melyekre $10a + b = x$, pl. $a = 0$, $b = x$). A magtérben azok az (a, b) vektorok vannak, melyekre $10a+b = 0$, vagyis a $10x+y$ egyenes pontjai.

109. Legyen az egyenes egyenlete $\alpha x + \beta y = 0$ és tekintsük azt a leképezést, amely egy (a, b) vektorhoz az $(\alpha a + \beta b, \alpha a + \beta b)$ vektort rendeli. A 107. feladatban látottakkal megegyezően igazolható, hogy ez lineáris transzformáció lesz, melynek magtere a 108. feladatban látottakkal megegyezően éppen az egyenes.

111. Első megoldás. Tegyük fel, hogy létezik ilyen lineáris transzformáció és legyen $\underline{v}$ egy tetszőleges, nullvektortól különböző vektor a síkon. Ekkor $\underline{v}$ képe $(1, 1), (2, 2)$ vagy $(3, 3)$. A $4\underline{v}$ vektor képe így $(4, 4), (8, 8)$ vagy $(12, 12)$. Mivel ezen vektorok egyike sem lehet semelyik vektor képe sem, ellentmondásra jutottunk, a kérdéses lineáris transzformáció tehát nem létezik.

Második megoldás. Tegyük fel, hogy létezik ilyen lineáris transzformáció, jelöljük $\mathcal{A}$-val. A feltétel szerint $Im(\mathcal{A})$ legalább 2 és legfeljebb 4 vektorból áll, ami lehetetlen, hiszen $Im(\mathcal{A})$ altere a síknak, az alterek pedig vagy 1 vagy végtelen sok vektort tartalmaznak, hiszen bármely (nullától különböző) altérbeli vektornak minden számszorosa is benne lesz az altérben.

112. Eredmény: például a szokásos bázisban $((1, 0), (0, 1))$ a mátrix

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

113. Eredmény:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

114. Eredmény:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

118. Nevezzük a lineáris transzformációt $\mathcal{A}$-nak. Először előállítjuk a $(11, 6)$ vektort az $(5, 3)$ és a $(4, 3)$ vektorok lineáris kombinációjaként, azaz megoldjuk a-ra és b-re az $a(5, 3)+ b(4, 3) = (11, 6)$ egyenletet. Az egyenletet koordinátánként vizsgálva az

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 11 \\ 3 & 3 & 6 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk, melyet (Gauss-eliminációval vagy ahogy jólesik) megoldva $a = 3$, $b = -1$ adódik. Így $(11, 6) = 3(5, 3) - (4, 3)$. Innen a lineáris leképezéseket definiáló szabályok használatával $\mathcal{A}(11, 6) = \mathcal{A}(3(5, 3) - (4, 3)) = 3\mathcal{A}(5, 3) - \mathcal{A}(4, 3) = 3(2, 3) - (3, 2) = (3, 7)$.

119. Írjuk fel a lineáris transzformáció (nevezzük $\mathcal{A}$-nak) mátrixát a szokásos bázisban. Ehhez előállítjuk az $(1, 0)$ és a $(0, 1)$ vektort az $(5, 3)$ és a $(4, 3)$ vektorok lineáris kombinációjaként. Ehhez használhatunk egyenletrendszert, mint az előző feladatban, de gyorsabb megfigyelni, hogy $(1, 0) = (5, 3) - (4, 3)$, és $(0, 1) = \frac{1}{3}((5, 3) - 5(1, 0)) = -\frac{4}{3}(5, 3) + \frac{5}{3}(4, 3)$, ahonnan $\mathcal{A}(1, 0) = \mathcal{A}((5, 3) - (4, 3)) = \mathcal{A}(5, 3) - \mathcal{A}(4, 3) = (3, 2) - (2, 1) = (1, 1)$ és

$\mathcal{A}(0,1) = \mathcal{A}(-\frac{4}{3}(5,3) + \frac{5}{3}(4,3)) = -\frac{4}{3}\mathcal{A}(5,3) + \frac{5}{3}\mathcal{A}(4,3) = (-4, -\frac{8}{3}) + (\frac{10}{3}, \frac{5}{3}) = (-\frac{2}{3}, -1)$. A keresett mátrix így (a lineáris leképezés mátrixának definíciója szerint)

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

E mátrix-szal (balról) megszorozva egy tetszőleges vektor koordinátavektorát (ami jelen esetben — mivel a sík szokásos bázisát használjuk — maga a vektor, oszlopvektorként felírva), megkapjuk a vektor képét (pontosabban a kép koordinátavektorát), így a keresett képek rendre: $(7,5)$, $(-\frac{4}{3}, -5)$, $(\frac{5}{3}, 1)$, $(\frac{2}{3}, 0)$, $(-\frac{1}{3}, -2)$, $(\frac{1}{3}, -1)$.

120. Eredmény:

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

121. Mivel $\underline{b}_1 = 1\cdot\underline{b}_1 + 0\cdot\underline{b}_2$ és $\underline{b}_2 = 0\cdot\underline{b}_1 + 1\cdot\underline{b}_2$, ezért $[\underline{b}_1]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ és $[\underline{b}_2]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Mivel $\mathcal{A}(\underline{b}_1) = \underline{b}_2$, ezért a tanult tétel szerint $[\mathcal{A}]_B \cdot [\underline{b}_1]_B = [\underline{b}_2]_B$, vagyis $\begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ezért a mátrixszorzás definíciója szerint $1 \cdot p + 0 \cdot \sqrt{2} = 0$ és $1 \cdot q + 0 \cdot \sqrt{3} = 1$, vagyis $p = 0$ és $q = 1$.

122. Első megoldás. Legyen a feladatban szereplő mátrix A. $Ker(\mathcal{A})$-ban azok az $(x,y,z)^T$ vektorok lesznek, melyeket A-val balról szorozva a $(0,0,0)^T$ vektort kapjuk. Ebből az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk, melyet (Gauss-eliminációval vagy máshogy) megoldva $x = y = z = 0$ adódik. Így $Ker(\mathcal{A})$ egyedül a nullvektorból áll. $Im(\mathcal{A})$-ban azok az $(a,b,c)^T$ vektorok lesznek, melyek előállnak úgy, hogy A-val balról szorzunk egy $(x,y,z)^T$ vektort. Ebből az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk, melyet (Gauss-eliminációval vagy máshogy) megoldva $x = a$, $y = b - a$, $z = c - b$ adódik. Rögzített a, b, c értékekhez tehát mindig találtunk alkalmas x, y, z értékeket, így $Im(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3$.

Második megoldás. A leképezés mátrixának oszlopai definíció szerint a bázisvektorok képeinek koordinátavektorai, így az $(1,1,1)^T$, $(0,1,1)^T$, $(0,0,1)^T$ vektorok mindhárman benne vannak $Im(\mathcal{A})$-ban. Mivel ezek bázist alkotnak $\mathbb{R}^3$-ben és $Im(\mathcal{A})$ altere $\mathbb{R}^3$-nek, $Im(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3$. A dimenziótétel szerint $\dim Ker(\mathcal{A}) + \dim Im(\mathcal{A}) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, így $\dim Ker(\mathcal{A}) = 0$, tehát $Ker(\mathcal{A})$ egyedül a nullvektorból áll.

123. Írjuk fel az $\mathcal{A}(6,11)$ vektor C szerinti koordinátavektorát az $\mathcal{A}$ leképezés B és C szerinti mátrixa, illetve a $(6,11)$ vektor B szerinti koordinátavektora segítségével. Ez utóbbit nem nehéz meghatározni: $(6;11) = 2 \cdot (2;3) + 1 \cdot (2;5)$, így $[(6;11)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Mivel $[\mathcal{A}((6;11))]_C = [\mathcal{A}_{B,C}] \cdot [(6;11)]_B$,

$$[\mathcal{A}((6;11))]_C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ezért $\mathcal{A}((6;11)) = \underline{c}_1 + 2\underline{c}_3$. Mivel $\mathcal{A}((6;11)) = (1;6;7)$ és $\underline{c}_1 = (1;2;1)$, így $\underline{c}_3 = \frac{1}{2}((1;6;7) - (1;2;1)) = (0;2;3)$.

124. $Ker(\mathcal{A})$ meghatározásához az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & c & 1 & 0 \\ 1 & 1 & c & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kell megoldanunk. A $c = 0$ esetet érdemes külön vizsgálni, ha ugyanis nem ez a helyzet, akkor a Gauss-elimináció sokkal kellemesebben futtatható az 1. és a 3. sor cseréje után. $c = 0$ esetén (mondjuk Gauss-eliminációval) $x = -y = -z$ adódik (ami egy origón átmenő egyenes). Ha c nem 0, akkor az 1. és a 3. sor cseréje után Gauss-eliminációval az

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1-c^2 & 0 \end{array}\right)$$

egyenletrendszert kapjuk. Ennek a megoldása $c = 1$ esetén $x = 0$, $y = -z$, $c = -1$ esetén $x = 0$, $y = z$ (ezek is origón átmenő egyenesek), minden más esetben pedig (amikor tehát c nem 0,1,-1) $x = y = z = 0$. Az utóbbi esetben $Im(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^3$ a dimenziótétel miatt. A többi esetben $Im(\mathcal{A})$-t a bázisvektorok képei által generált altérként határozzuk meg: $c = 0$ esetén $Im(\mathcal{A})$ nyilván a $z = 0$ sík, $c = 1$ esetén $Im(\mathcal{A})$ az $x = y$ sík, $c = -1$ esetén $Im(\mathcal{A})$ az $x + y = -2z$ sík.

127. A sajátértékek az 1 és a 4, az 1 sajátértékhez a $(-2, 1)$ vektor (nem nulla) többszörösei, a 4 sajátértékhez az $(1, 1)$ vektor (nem nulla) többszörösei tartoznak sajátvektorként.

131. Nevezzük a lineáris transzformációt $\mathcal{A}$-nak. $\mathcal{A}(0,1) = \mathcal{A}(\frac{1}{2} \cdot (0,2)) = \frac{1}{2}(3,4) = (\frac{3}{2}, 2)$. $\mathcal{A}$ mátrixa tehát a szokásos bázisban $\begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. $\mathcal{A}$ karakterisztikus polinomja ez alapján

$$\det \begin{pmatrix} 4-x & \frac{3}{2} \\ 2 & 2-x \end{pmatrix} = (4-x)(2-x) - 3.$$

Ennek gyökei 1 és 5, ezek lesznek a mátrix, és így a lineáris transzformáció sajátértékei. A sajátvektorok meghatározásához megoldjuk a $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert és a $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{array}\right)$ egyenletrendszert. Az első esetben a $2x + y = 0$ egyenesen lévő, origótól különböző vektorok adódnak sajátvektorként, ezek tartoznak az 1 sajátértékhez, a második esetben pedig a $2x - 3y = 0$ egyenesen lévő, origótól különböző vektorok, ezek tartoznak az 5 sajátértékhez.

132. A leképezés lineáris, tehát az $(1,0) = (2,1) - (1,1)$ vektorhoz az $(1,8) - (-1,7) = (2,1)$ vektort rendeli, a $(0,1) = (1,1) - (1,0)$ vektorhoz pedig a $(-1,7) - (2,1) = (-3,6)$ vektort. A leképezés mátrixa tehát a szokásos bázisban

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

A karakterisztikus polinom ez alapján

$$\det \begin{pmatrix} 2-x & -3 \\ 1 & 6-x \end{pmatrix} = (2-x)(6-x)+3.$$

Ennek gyökei 3 és 5, ezek lesznek a mátrix, és így a lineáris transzformáció sajátértékei. A sajátvektorok meghatározásához megoldjuk a

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

egyenletrendszert és a

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

egyenletrendszert. Az első esetben az $x+3y=0$ egyenesen lévő, origótól különböző vektorok adódnak sajátvektorként, ezek tartoznak a 3 sajátértékhez, a második esetben pedig az $x+y=0$ egyenesen lévő, origótól különböző vektorok, ezek tartoznak az 5 sajátértékhez.

133. a) Tudjuk, hogy $\lambda=7$ pontosan akkor sajátérték, ha $\det(A-7I)=0$. Mivel $A-7I$ negyedik oszlopa a feladat szerint csupa nulla, ezért $\det(A-7I)=0$ teljesül, így $\lambda=7$ valóban sajátérték.
b) Mivel $\lambda=7$-ről tudjuk, hogy sajátérték, ezért kereshetünk ehhez tartozó $\underline{v}$ sajátvektort. Vagyis olyan $\underline{v}$-t keresünk, amelyre $\underline{v}\neq\underline{0}$ és $A\cdot\underline{v}=7\cdot\underline{v}$. Legyen $\underline{v}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$. Ekkor $A\cdot\underline{v}$ nem más, mint az A negyedik oszlopa, vagyis $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}^T$. Ezért $A\cdot\underline{v}=7\cdot\underline{v}$ teljesül, így $\underline{v}$ sajátvektor. Megjegyzés.A b) feladat megoldásából az a) feladat állítása is következik: mivel a talált $\underline{v}\neq\underline{0}$ vektorra $A\cdot\underline{v}=7\cdot\underline{v}$ teljesül, ezért $\lambda=7$ definíció szerint sajátértéke A-nak.

134. a) Ismert, hogy $\lambda=3$ akkor és csak akkor sajátértéke A-nak, ha $A-3I$ determinánsa 0, azaz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & p \\ 5 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Ezt (például) az első sor szerinti kifejtéssel kiszámolva:
$1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + p\cdot\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 + p\cdot 1 = p+1$. Ezekből tehát $p+1=0$, vagyis $p=-1$.

b) Tudjuk, hogy $\lambda=3$ sajátérték, vagyis kereshetünk egy ehhez tartozó sajátvektort. Vagyis olyan $\underline{v}\in\mathbb{R}^3$ vektort keresünk, melyre $A\cdot\underline{v}=3\cdot\underline{v}$. Legyen $\underline{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Ekkor a mátrixszorzás definíciója szerint (és a $p=-1$ értéket figyelembe véve) a $4x-z=3x$, $5x+7y+7z=3y$, $x+y+5z=3z$ feltételek adódnak. Az első egyenletből $z=x$, ezt a másik két egyenletbe helyettesítve rendezés után mindkét esetben az $y=-3x$ egyenletet kapjuk. Így sajátvektor lesz a $\underline{v}=\begin{pmatrix} x \\ -3x \\ x \end{pmatrix}$ vektor minden $x\neq 0$ értékre.

Megjegyzés. A fenti megoldásban csak a $\lambda=3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorokat határoztuk meg. További (kellemetlen, de nem nehéz) számolással megkapható a mátrix további két sajátértéke is: $\frac{13\pm\sqrt{17}}{2}$. Ezekhez is tartoznak sajátvektorok, így a b) feladatnak további megoldásai is vannak, melyek meghatározása persze sokkal körülményesebb.

136. Az a) állítás nem igaz, ellenpélda (mondjuk) a 60°-os forgatás a síkon. Ennek nincs sajátvektora, de a köbének az origót leszámítva mindenki a sajátvektora lesz (-1 sajátértékkel). A b) állítást könnyű belátni: ha v sajátvektora $\mathcal{A}$-nak, akkor alkalmas λ-ra $\mathcal{A}(v) = \lambda v$, innen $\mathcal{A}^3(v) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{A}(v))) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\lambda v)) = \mathcal{A}(\lambda^2 v) = \lambda^3 v$, vagyis v sajátvektora $\mathcal{A}$-nak (λ^3 sajátértékkel).

139. Legyenek az $\underline{u}$ és $\underline{v}$ sajátvektorokhoz tartozó sajátértékek α, illetve β, ekkor $\mathcal{A}(\underline{u}) = \alpha\underline{u}$ és $\mathcal{A}(\underline{v}) = \beta\underline{v}$. Kihasználva, hogy $\mathcal{A}$ lineáris leképezés $\mathcal{A}(\underline{u}+\underline{v}) = \mathcal{A}(\underline{u})+\mathcal{A}(\underline{v}) = \alpha\underline{u}+\beta\underline{v}$. Az $\underline{u}+\underline{v}$ vektor akkor és csak akkor lesz sajátvektora $\mathcal{A}$-nak, ha $\mathcal{A}(\underline{u}+\underline{v}) = \mu(\underline{u}+\underline{v})$ valamely alkalmas μ skalárra. Ha ez teljesülne, akkor $\alpha\underline{u}+\beta\underline{v} = \mu(\underline{u}+\underline{v})$, vagyis $(\alpha-\mu)\underline{u} = (\mu-\beta)\underline{v}$. Mivel $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egyike sem nullvektor, α nem lehet egyenlő μ-vel, hiszen ekkor μ is egyenlő lenne β-val, amiből $\alpha = \beta$ következne. Az egyenlőséget így oszthatjuk $(\alpha-\mu)$-vel és kiderül, hogy az $\underline{u}$ vektor a $\underline{v}$ vektor számszorosa, ami lehetetlen, hiszen ekkor azonos sajátértékhez tartozó sajátvektorok lennének.

141. a) $(3+2i)^2 = 9+12i+4i^2 = 5+12i$.
b) $\dfrac{1+17i}{3+i} = \dfrac{(1+17i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \dfrac{3-i+51i-17i^2}{9-i^2} = \dfrac{20+50i}{10} = 2+5i.$
c) $-1000 = 1000(\cos\pi + i\sin\pi)$. Így $\sqrt[3]{-1000} = 10\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, ahol $k = 0,1,2$. Ebből $k=0$-ra $10\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 10\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5+5\sqrt{3}i$, $k=1$-re $10(\cos\pi+i\sin\pi) = -10$, és $k=2$-re $10\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 10\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5-5\sqrt{3}i$ adódik.

143. Mindkét oldalt $(5+\sqrt{3}i)$-vel osztva az eredetivel ekvivalens $z^5 = 1-\sqrt{3}i$ egyenletet kapjuk. $1-\sqrt{3}i$ hossza 2, az x tengellyel bezárt szöge pedig 300°, trigonometrikus alakja tehát $2\cdot(\cos 300° + i\sin 300°)$. Így az ötödik gyökeinek hossza $\sqrt[5]{2}$, az ötödik gyökök x tengellyel bezárt szögei pedig $60°, 132°, 204°, 276°, 348°$. Ezek közül egyedül a 60° szögű gyöknek pozitív a valós és a képzetes része is, ennek trigonometrikus alakja $\sqrt[5]{2}(\cos 60° + i\sin 60°)$, algebrai alakja tehát $\frac{\sqrt[5]{2}}{2} + \frac{\sqrt[5]{2}\sqrt{3}}{2}i$.

144. $-1-\sqrt{3}i$ hossza 2, az x tengellyel bezárt szöge pedig 240°, trigonometrikus alakja tehát $2\cdot(\cos 240° + i\sin 240°)$. Így a nyolcadik gyökeinek hossza $\sqrt[8]{2}$, a nyolcadik gyökök x tengellyel bezárt szögei pedig 30°, 75°, 120°, 165°, 210°, 255°, 300°, 345°. Ezek közül a 210° és a 255° szögű gyököknek negatív a valós és a képzetes része is, az előbbi trigonometrikus alakja $\sqrt[8]{2}(\cos 210° + i\sin 210°)$, algebrai alakja tehát $-\frac{\sqrt[8]{2}\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt[8]{2}}{2}i$.

145. Számítsuk ki először a jobboldalon álló számot.

$$\frac{3+11i}{4-7i} = \frac{(3+11i)(4+7i)}{(4-7i)(4+7i)} = \frac{-65+65i}{65} = -1+i.$$

Ezt beírva és az egyenletet $2^{8,5}$-nel szorozva: $z^9 = -2^{8,5} + 2^{8,5}i$. z tehát $\sqrt[9]{-2^{8,5}+2^{8,5}i}$ valamelyik értéke lehet csak.

$$-2^{8,5} + 2^{8,5}i = 2^9\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2^9\left(\cos 135° + i\sin 135°\right).$$

Ebből

$$\sqrt[9]{-2^{8,5}+2^{8,5}i} = 2\left(\cos\left(15° + k\cdot 40°\right) + i\sin\left(15° + k\cdot 40°\right)\right),$$

$0 \leq k \leq 8$. A $15° + k \cdot 40°$, $0 \leq k \leq 8$ alakú szögek közül $100°$ és $170°$ közé csak a $135°$ esik (a $k = 3$ esetben). Így az egyetlen megoldás: $z = 2\,(\cos 135° + i \sin 135°) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

155. Legyen z n., w pedig k. egységgyök. $(zw)^{nk} = z^{nk}w^{nk} = (z^n)^k(w^k)^n = 1$, tehát zw biztosan nk. egységgyök.

158. Első megoldás. Legyen z trigonometrikus alakja $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Ekkor az egyenlet $r^3(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha) = r(\cos -\alpha + i\sin -\alpha)$ alakba írható, ahonnan $r = r^3$ és $3\alpha - (-\alpha) = k \cdot 360°$. Innen $r = 0$ esetén $z = 0$, $r \neq 0$ esetén $r = 1$ (hiszen r nem lehet negatív). Az utóbbi esetben meg kell keresni α-t is, erre $0°, 90°, 180°, 270°$ adódik. A megoldások tehát 0, 1, -1, i és $-i$ lesznek.

Második megoldás. Legyen z algebrai alakja $z = a + bi$. Az egyenlet ekkor (némi számolás után) $a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = a - bi$ alakba írható. Innen $a^3 - 3ab^2 = a$ és $3a^2b - b^3 = -b$. Ha $a = 0$, akkor az első egyenlet teljesül, a másodikból pedig $b^3 = b$-t kapjuk, ahonnan $b = 0$, $b = 1$ vagy $b = -1$. Ha $a \neq 0$, de $b = 0$, akkor a második egyenlet teljesül, az elsőből pedig $a^3 = a$-t kapjuk, ahonnan $a = 1$ vagy $a = -1$. Ha sem a, sem b nem 0, akkor az első egyenletet a-val, a másodikat b-vel osztva, majd a kapott egyenleteket összeadva $a^2 = b^2$ adódik, ezt a kapott első egyenletbe beírva a $2b^2 = -1$ egyenletet kapjuk, aminek nincs valós megoldása. A megoldások tehát 0, 1, -1, i és $-i$.

Harmadik megoldás. $z = 0$ nyilván megoldás. Ha z nem 0, akkor a hossza csak 1 lehet, hiszen máskülönben a köbe és a konjugáltja nem lehetne egyenlő (és így azonos hosszú). Mindkét oldalt (a 0-tól különböző) z-vel szorozva a bal oldalon z^4-t, a jobb oldalon z hosszának négyzetét, azaz egy valós számot kapunk, azaz z-nek az x tengellyel bezárt szöge $90°$ többszöröse kell, hogy legyen. Innen a megoldások csak 0, 1, -1, i és $-i$ lehetnek, és ezek valóban jók is.

159. Mivel a mátrix elemei mind különbözők, ezért egy 3×3-as részmátrix kiválasztása nem mást jelent, mint annak a 3 sornak és 3 oszlopnak a kiválasztását, amelyek a részmátrixot meghatározzák. Először válasszuk ki a mátrix 8 sora közül azt a 3-at, amelyek a részmátrixban szerepelnek. A lehetőségek száma (az ismétlés nélküli kombinációnál tanultak szerint) $\binom{8}{3}$. Ezután válasszuk ki a 10 oszlop közül a részmátrixban szereplő 3-at; a lehetőségek száma $\binom{10}{3}$. Mivel az először mondott $\binom{8}{3}$ választási lehetőség mindegyike $\binom{10}{3}$ féleképp folytatható a másodiknak mondott választással, ezért a lehetőségek száma összesen $\binom{8}{3} \cdot \binom{10}{3} = \frac{8\cdot7\cdot6}{6} \cdot \frac{10\cdot9\cdot8}{6}$.

161. Egy szelvény kitöltésére a lehetőségek száma nem más, mint 4 db I, 2 db R, 2 db N, 2 db X, 1 db M és 1 db D elemekből készíthető ismétléses permutációk száma, vagyis
$\dfrac{12!}{4! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$.
Ha a feladatbeli lakó három szelvénnyel játszik, akkor a feladata nem más, mint a fenti számú – jelöljük ezt N-nel – lehetőségből kiválasztani három különbözőt a sorrendre való tekintet nélkül. Így az ismétlés nélküli kombinációról tanultak szerint a lehetőségek száma: $\binom{N}{3} = \frac{N(N-1)(N-2)}{6}$.

163. $(1+1)^{101}$-t a binomiális tétellel kiszámítva

$$2^{101} = \binom{101}{0} + \binom{101}{1} + \ldots + \binom{101}{101}.$$

Az $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ összefüggésből

$$2^{101} = 2 \cdot \left(\binom{101}{0} + \binom{101}{1} + \ldots + \binom{101}{50}\right).$$

Innen $\left(\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\ldots+\binom{101}{50}\right)=2^{100}$, így a feladatbeli kifejezés pontos értéke 100.

Második megoldás. A feladatbeli, zárójelben álló összeg egy 101 elemű halmaz összes, legföljebb 50 elemű részhalmazát számlálja meg, az elemszám szerint vizsgálva, majd összeadva az eseteket. A legföljebb 50 elemű részhalmazok párba állíthatók a legalább 51 eleműekkel: minden részhalmaz párja legyen a komplementere. Ezért a legföljebb 50, illetve a legalább 51 elemű részhalmazok száma azonos. Egy 101 elemű halmaz összes részhalmazainak száma 2^{101}, hiszen egy részhalmaz kiválasztásakor egymás után mind a 101 elemről kétféle döntés hozható: eleme lesz a részhalmaznak vagy sem. A fentiekből $\binom{101}{0}+\binom{101}{1}+\ldots+\binom{101}{50}=\frac{2^{101}}{2}=2^{100}$, így a feladatbeli kifejezés pontos értéke 100.

164. Az elsőnek választott szám a 100 eset közül 20-ban osztható öttel, ekkor a másodikként választott számnak is ilyennek kell lennie, ez tehát 19 féle lehet. Mind a 20 kezdéshez 19 különböző folytatás tartozik és minden párt kétszer választottunk ki, tehát $\frac{20\cdot19}{2}$ ilyen számpár lesz. Ha az első szám nem osztható öttel, akkor 20 esetben lesz a maradéka 1, 2, 3, illetve 4. Ezekhez rendre 4, 3, 2, illetve 1 maradékot adó számot kell választani másodiknak. Ez mind a négy esetben 20 féle lehet, és ilyenkor is minden párt kétszer választottunk ki, tehát a négy esetben együtt $\frac{4\cdot20\cdot20}{2}$ ilyen számpár lesz. Mivel a két eset közül (az elsőnek választott szám oszható, illetve nem osztható öttel) pontosan az egyik fordul elő és a két esethez nem tartozik közös számpár, a kérdéses kiválasztások száma $\frac{20\cdot19}{2}+\frac{4\cdot20\cdot20}{2}=990$.

Megjegyzés. Logikusnak tűnik az a gondolat, hogy az összes párok ötöde lesz ilyen, hiszen száz osztható öttel. Mivel az összes párok száma $\frac{99\cdot100}{2}=99\cdot50$, ebből a megoldás azonnal következne. Bármilyen logikus is azonban a gondolat (sőt, persze igaz is), érvelni mellette nem magától értetődő, hiszen például ha nem kettő, hanem ötven számot adnánk össze, akkor nem lenne igaz, mivel az összes számötvenesek száma $\left(\binom{100}{50}\right)$ nem is osztható öttel. (Ezt sem nehéz látni, de ha nincs kedvünk végiggondolni, akkor száz és ötven helyett nézzük meg tízre és ötre: $\binom{10}{5}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5!}$, ami nyilván nem osztható öttel.)

4. Zárthelyi dolgozatok, 2012. ősz

4.1. 1. zh., 2012. október 18.

1. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(1;3;4)$ és a $Q(3;6;10)$ pontokon és párhuzamos az $\frac{x-9}{3} = y+4 = \frac{z}{5}$ egyenletrendszerű egyenessel.

2. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci típusúnak, ha a harmadiktól kezdve mindegyik koordinátája az előtte álló két koordináta összege. Így például a $(3;-1;2;1;3)$ vektor Fibonacci típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben?

3. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n\}$ két bázis a (tetszőleges) V vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy minden $\underline{b}_i \in B$ esetén található olyan $\underline{c}_j \in C$, hogy $B \setminus \{\underline{b}_i\} \cup \{\underline{c}_j\}$ és $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_i\}$ egyaránt bázisok V-ben.

4. Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned}
&x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 - 4x_5 = 3\\
&2x_1 + 11x_2 + 12x_4 - 3x_5 = 11\\
&4x_1 + 9x_2 + 26x_3 - 2x_4 + p \cdot x_5 = 9\\
&3x_1 + 13x_2 + 7x_3 + 11x_4 + q \cdot x_5 = 13
\end{aligned}$$

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & 3 & 0 & 8\\
2 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0\\
2 & 0 & 0 & 0 & 4\\
0 & 2 & 3 & 0 & 0
\end{vmatrix}$$

6. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra. (E-vel jelöltük az egységmátrixot, A^k pedig azt a k tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tagja A.)

a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$, akkor $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$.

b) Ha $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$.

4.2. 2. zh., 2012. november 22.

1. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások minden olyan $n \times n$-es A mátrixra, amelynek van inverze.

a) Ha A első oszlopának minden eleme azonos, akkor A^{-1}-ben az elsőt kivéve minden sorban az elemek összege 0.

b) Ha A-ban az elsőt kivéve minden sorban az elemek összege 0, akkor A^{-1} első oszlopának minden eleme azonos.

2. Megválasztható-e a p paraméter értéke úgy, hogy az alábbi mátrix rangja 3 legyen? Ha igen, hogyan?

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 9 & 4 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & p & p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

3. Az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés az $(1; 2)$ vektorhoz a $(0; 3; -3)$ vektort, a $(2; 1)$-hez a $(3; 3; 0)$-t rendeli. Igaz-e az $(1; 2; 3) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ állítás?

4. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amely egy tetszőleges $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz az $(x + y; x + z; x + 2y + 2z)$ vektort rendeli.

a) Igaz-e, hogy az $(1; 2; 5)$ vektor sajátvektora $\mathcal{A}$-nak?

b) Van-e $\mathcal{A}$-nak pozitív sajátértéke?

(A feladat megoldásához nem szükséges megmutatni azt, hogy $\mathcal{A}$ valóban lineáris transzformáció.)

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenleteknek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része és a képzetes része is pozitív.

a) $(7 - i) \cdot z = 19 + 33i$ b) $\sqrt{2} \cdot z^5 = -100000 - 100000i$

6. Hányféleképp lehet elhelyezni a sakktáblán 3 világos és 4 sötét gyalogot?
(A sakktábla 8×8-as. Egy mezőre természetesen nem lehet egynél több bábut tenni; ettől eltekintve a bábuk elhelyezésénél a sakk szabályaira nem kell tekintettel lenni. Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha vagy van olyan mező, amin az egyik esetben nem áll bábu, a másikban igen, vagy van olyan mező, amin nem azonos színű bábuk állnak a két esetben. A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

4.3. 1. pótzh., 2012. december 3.

1. Egy síkra esnek-e a térben az $A(1;5;3)$, $B(7;11;-5)$, $C(10;14;-9)$ és $D(12;6;-15)$ pontok?

2. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a harmadiktól kezdve mindegyik koordináta az előtte álló két koordináta átlaga. Így például a $(-2;10;4;7;5;5,5)$ vektor W-beli. Határozzuk meg $\dim W$ értékét. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

3. A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy igaz-e az $\underline{e} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \text{ és } \underline{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ p+4 \end{pmatrix}$$

4. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 5 & 10 & 9 & 15 \\ 4 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

5. Az $n \times n$-es A mátrix első oszlopának minden eleme 1. A mátrix minden, nem az első sorban és nem az első oszlopban álló eleme a tőle balra és a felette található két elem összege. (Képletben: $a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$ minden $2 \leq i, j \leq n$ esetén.) Mutassuk meg, hogy $\det A = 1$.

6. A 100×100-as A mátrix bal felső sarkában álló 50×50-es részmátrixának minden eleme 6, a jobb felső sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme -4, a bal alsó sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme 9, végül a jobb alsó sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme -6. Határozzuk meg az A^{2012} mátrixot (vagyis annak a 2012 tagú szorzatnak az eredményét, amelynek minden tagja A).

4.4. 2. pótzh., 2012. december 3.

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki A inverzét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

2. Nevezzük egy számsorozatot *félig számtaninak*, ha bármely eleméről a következőre átlépve a növekmény csak két különböző értéket vehet fel. (Így például a 3, 7, 11, 12, 16, 17, 18 sorozat félig számtani.) Az A mátrixra teljesül, hogy az első három sora félig számtani sorozatot alkot (vagyis a sor elemein balról jobbra végighaladva félig számtani sorozatot kapunk), az összes többi sora pedig számtani sorozatot alkot. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{r}(A) \leq 9$ (ahol r-rel a rangot jelöltük).

3. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektort konstansnak, ha minden eleme azonos. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és legyen B, illetve C két bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n$ és $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n$ egyaránt konstans vektorok és az $[\mathcal{A}]_B$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor. Mutassuk meg, hogy ekkor az $[\mathcal{A}]_C$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor.

4. Határozzuk meg az alábbi mátrix minden sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez adjunk meg egy sajátvektort.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenleteknek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része pozitív!

a) $\dfrac{22 - 21i}{z} = 3 - 4i$ b) $z^3 + 125i = 0$

6. Egy kisváros 20 fős önkormányzati képviselőtestülete három különböző feladatra választ egy-egy bizottságot (legyenek ezek A, B és C). Mindhárom bizottság 4 fős és bármely képviselő több bizottságban is lehet tag, de azt nem szeretnék, ha két bizottságnak teljesen azonos volna a tagsága. További cél, hogy a polgármester (aki egyike a 20 képviselőnek) pontosan egy bizottságban legyen tag a három közül (de az mindegy, hogy melyikben). Hányféleképpen választhatják meg a három bizottságot?
(A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*.)

5. Zárthelyi javítókulcsok, 2012. ősz

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

5.1. 1. zh., pontozási útmutató, 2012. október 18.

1. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(1;3;4)$ és a $Q(3;6;10)$ pontokon és párhuzamos az $\frac{x-9}{3} = y+4 = \frac{z}{5}$ egyenletrendszerű egyenessel.

* * * * *

Jelölje a megadott egyenest e, a keresett síkot S, annak egy normálvektorát pedig $\underline{n}$.
e irányvektora $\underline{v}(3;1;5)$. (1 pont)
Mivel S párhuzamos e-vel, ezért $\underline{n}$ merőleges $\underline{v}$-re. (1 pont)
$\underline{n}$ ugyancsak merőleges a $\overrightarrow{PQ}$ vektorra (hiszen ez a két pont a síkban fekszik). (1 pont)
$\overrightarrow{PQ} = \underline{q} - \underline{p} = (2;3;6)$ (ahol $\underline{p}$ és $\underline{q}$ a két pontba mutató helyvektorokat jelölik). (1 pont)
A fentiek miatt a $\overrightarrow{PQ} \times \underline{v}$ vektoriális szorzat jó választás $\underline{n}$-re. (2 pont)
Ezt a tanult képlettel meghatározva:

$$\overrightarrow{PQ}\times\underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (3\cdot5-6\cdot1)\underline{i}-(2\cdot5-6\cdot3)\underline{j}+(2\cdot1-3\cdot3)\underline{k} = (9;8;-7). \text{(2 pont)}$$

A kapott normálvektor és P (vagy Q) segítségével a sík egyenlete már a tanult képlettel felírható: $9x+8y-7z=5$. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a normálvektor meghatározásához nem szükséges a vektoriális szorzat fogalma: valamivel több számolással a $\underline{v}\cdot\underline{n} = \underline{0}$, $\overrightarrow{PQ}\cdot\underline{n} = \underline{0}$ összefüggéseket felhasználva is megkapható egy alkalmas $\underline{n}$ normálvektor.

2. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^5$-beli vektort Fibonacci típusúnak, ha a harmadiktól kezdve mindegyik koordinátája az előtte álló két koordináta összege. Így például a $(3;-1;2;1;3)$ vektor Fibonacci típusú. Igaz-e, hogy a Fibonacci típusú vektorok alteret alkotnak $\mathbb{R}^5$-ben?

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

Legyen a Fibonacci típusú, $\mathbb{R}^5$-beli vektorok halmaza F és legyen $\underline{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ és $\underline{w} = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)^T$ két F-beli elem és $\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges skalár.
Először megmutatjuk, hogy $\underline{v} + \underline{w}$ szintén F-beli. Ugyanis $\underline{v} + \underline{w}$ harmadik eleme $x_3 + y_3$, ahol $x_3 = x_1 + x_2$ és $y_3 = y_1 + y_2$ (mert $\underline{v}$ és $\underline{w}$ F-beliek). Így $\underline{v} + \underline{w}$ harmadik eleme $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2)$, vagyis valóban $\underline{v} + \underline{w}$ első két elemének összege. Teljesen hasonlóan látható be, hogy $\underline{v} + \underline{w}$ negyedik és ötödik eleme is a fölötte álló kettő összegével egyenlő. (4 pont)
Most megmutatjuk, hogy $\lambda \cdot \underline{v}$ is F-beli. Ugyanis $\lambda \cdot \underline{v}$ harmadik eleme $\lambda \cdot x_3 = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$, vagyis a $\lambda \cdot \underline{v}$ harmadik eleme az első kettő összegével egyenlő. Ugyanígy indokolható, hogy $\lambda \cdot \underline{v}$ negyedik és ötödik eleme is a fölötte álló kettő összege. (4 pont)
A fentiekből következik, hogy F olyan nemüres részhalmaza $\mathbb{R}^5$-nek, amely zárt az összeadásra és a skalárral szorzásra, így a tanult tétel értelmében altér. (F valóban nemüres, hiszen például benne van a nullvektor vagy a feladatban megadott konkrét vektor.)(2 pont)

3. Legyen $B = \{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n\}$ és $C = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n\}$ két bázis a (tetszőleges) V vektortérben. Bizonyítsuk be, hogy minden $\underline{b}_i \in B$ esetén található olyan $\underline{c}_j \in C$, hogy $B \setminus \{\underline{b}_i\} \cup \{\underline{c}_j\}$ és $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_i\}$ egyaránt bázisok V-ben.

$* \quad * \quad * \quad * \quad *$

A feladat állítását az egyszerűség kedvéért $\underline{b}_1$-re mutatjuk meg (hiszen B elemeinek számozása tetszőleges). Legyen $W = \langle \underline{b}_2, \underline{b}_3, \ldots, \underline{b}_n \rangle$. Ekkor C-ben van W-hez nem tartozó elem, különben W-ben C n elemű lineárisan független rendszert, $B \setminus \{\underline{b}_1\}$ pedig $(n-1)$ elemű generátorrendszert alkotna szemben a tanult tétel állításával. Legyen tehát $C \setminus W = \{\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_k\}$ (C elemeinek számozása szintén tetszőleges). (1 pont)
Mivel C bázis, ezért (a tanultak miatt) $\underline{b}_1$ pontosan egyféleképp állítható elő C elemeiből lineáris kombinációval: $\underline{b}_1 = \gamma_1 \underline{c}_1 + \gamma_2 \underline{c}_2 + \ldots + \gamma_n \underline{c}_n$. (1 pont)
Állítjuk, hogy a $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ együtthatók között van nemnulla. Ellenkező esetben ugyanis $\underline{b}_1 = \gamma_{k+1} \underline{c}_{k+1} + \ldots + \gamma_n \underline{c}_n$ adódna, amiből $\underline{c}_{k+1}, \ldots, \underline{c}_n \in W$ miatt $\underline{b}_1 \in W$ is következne ellentmondásban a B lineáris függetlenségével. (2 pont)
Legyen tehát $\gamma_j \neq 0$, $1 \leq j \leq k$ tetszőleges. Állítjuk, hogy $\underline{c}_j$ megfelel a feladat állításának. Először megmutatjuk, hogy $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ bázis V-ben. $\underline{c}_j \notin W$-ből az „újonnan érkező vektor" előadáson tanult lemmája miatt adódik, hogy $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ lineárisan független rendszer. (1 pont)
Ha $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ nem volna generátorrendszer, akkor létezne egy, az elemeiből lineáris kombinációval ki nem fejezhető $\underline{w}$ vektor. Ekkor azonban, ismét csak az „újonnan érkező vektor" lemmája miatt $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j, \underline{w}\}$ is lineárisan független volna, ami ellentmond annak, hogy V-ben van n elemű generátorrendszer (bármelyik bázis). Így tehát $B \setminus \{\underline{b}_1\} \cup \{\underline{c}_j\}$ valóban bázis. (2 pont)
Most megmutatjuk, hogy $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_1\}$ is bázis V-ben. $\underline{b}_1$ biztosan nem fejezhető ki $C \setminus \{\underline{c}_j\}$ elemeiből lineáris kombinációval, mert a $\underline{b}_1$ egyetlen, C elemeiből való kifejezésében a $\underline{c}_j$ együtthatója (nevezetesen γ_j) nem nulla. (2 pont)
Ha $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_1\}$ nem volna generátorrendszer, akkor – a fentiekkel analóg módon – hozzávehető volna egy további vektor a lineáris függetlenség megtartásával, ellentmondásban azzal, hogy V-ben van n elemű generátorrendszer. Így tehát $C \setminus \{\underline{c}_j\} \cup \{\underline{b}_1\}$ is bázis, az állítást beláttuk. (1 pont)

4. Döntsük el, hogy a p és q valós paraméterek milyen értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek! Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned}&x_1+3x_2+5x_3+x_4-4x_5=3\\&2x_1+11x_2+12x_4-3x_5=11\\&4x_1+9x_2+26x_3-2x_4+p\cdot x_5=9\\&3x_1+13x_2+7x_3+11x_4+q\cdot x_5=13\end{aligned}$$

* * * * *

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&3&5&1&-4&3\\2&11&0&12&-3&11\\4&9&26&-2&p&9\\3&13&7&11&q&13\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&3&5&1&-4&3\\0&5&-10&10&5&5\\0&-3&6&-6&p+16&-3\\0&4&-8&8&q+12&4\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1&3&5&1&-4&3\\0&1&-2&2&1&1\\0&0&0&0&p+19&0\\0&0&0&0&q+8&0\end{array}\right)\qquad\text{(2 pont)}$$

Ha $p=-19$ és $q=-8$, akkor az utolsó két sor csupa 0, így ezek elhagyhatók. Ekkor a Gauss-elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk (egyetlen további, vezéregyes fölötti elem „kinullázásával"):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&11&-5&-7&0\\0&1&-2&2&1&1\end{array}\right)\qquad\text{(1 pont)}$$

Ekkor tehát végtelen sok megoldás van: $x_3=\alpha\in\mathbb{R}$, $x_4=\beta\in\mathbb{R}$, $x_5=\gamma\in\mathbb{R}$ szabad paraméterek, $x_1=7\gamma+5\beta-11\alpha$, $x_2=1-\gamma-2\beta+2\alpha$. (2 pont)

Ha $p\neq-19$ vagy $q\neq-8$ (vagy mindkettő), akkor az eliminációt folytatva az alábbi alakot kapjuk. Valóban, ha például $p\neq-19$, akkor a harmadik sor $(p+19)$-cel osztása, majd a negyedik sorból a harmadik $(q+8)$-szorosának a kivonása és a kapott csupa nulla sor elhagyása után jutunk az alábbi alakhoz (és analóg a helyzet a $q\neq-8$ esetben is).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&3&5&1&-4&3\\0&1&-2&2&1&1\\0&0&0&0&1&0\end{array}\right)\qquad\text{(2 pont)}$$

Innen a vezéregyesek fölötti nemnulla elemek (3 darab) „kinullázásával" kapjuk a redukált lépcsős alakot:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&11&-5&0&0\\0&1&-2&2&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{array}\right)\qquad\text{(1 pont)}$$

Ekkor is végtelen sok megoldás van: $x_3=\alpha\in\mathbb{R}$, $x_4=\beta\in\mathbb{R}$, $x_1=5\beta-11\alpha$, $x_2=1+2\alpha-2\beta$, $x_5=0$. (2 pont)

Ha valaki számolási hibát vét, de egyébként a megoldás elvileg jó, az számolási hibánként 1 pont levonást jelentsen. Ha a számolási hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor sajnos csak a fenti gondolatmenetnek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számolásokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek a számítások nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Számítsuk ki az alábbi determináns értékét *a determináns definíciója szerint.* (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A definícióban összeadandóként szereplő szorzatok közül csak azokat kell figyelembe venni, amelyek nem tartalmaznak 0 tényezőt, mert a többi szorzat a determináns értékét nem befolyásolja. (1 pont)
Egy ilyen szorzatban tehát a harmadik sorból csak a $\sqrt{5}$ választható. (1 pont)
Az első sorból 3 vagy 8 választható. Az előbbi esetben az ötödik sorból már csak a 2-est választhatjuk (mert a harmadik oszlopból már vettünk elemet), emiatt a második sorból csak 2-est, így a negyedikből csak a 4-est választhatjuk. Hasonlóan, ha az első sorból a 8-ast vesszük, akkor a negyedikből már csak a 2-est, a másodikból az 1-est és az ötödikből a 3-ast választhatjuk. (2 pont)
Így összesen csak két nemnulla szorzat keletkezik: $3 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 4 \cdot 2$ és $8 \cdot 1 \cdot \sqrt{5} \cdot 2 \cdot 3$.(1 pont)
A determináns értékének kiszámításához már csak az ehhez a két szorzathoz tartozó előjelet kell meghatározni. Az első szorzathoz tartozó permutáció $3, 1, 4, 5, 2$ (mert az első sorból a harmadik elemet vettük ki, a másodikból az elsőt, stb). Ennek a permutációnak az inverziószáma 4 (az inverzióban álló elempárok $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 2)$ és $(5, 2)$). Mivel az inverziószám páros, a szorzat előjele $+$. (2 pont)
Hasonlóan, a második szorzathoz tartozó permutáció $5, 2, 4, 1, 3$, ennek az inverziószáma 7, az előjel $-$. (1 pont)
Amint látható, a két nemnulla szorzat abszolút értékben egyenlő (mindkettő $48 \cdot \sqrt{5}$), de az előjelük ellentétes, így a determináns értéke 0. (2 pont)

6. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra! (E-vel jelöltük az egységmátrixot, A^k pedig azt a k tényezős szorzatot jelöli, amelynek minden tagja A.)

a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$, akkor $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$.

b) Ha $\det A = 1$ vagy $\det A = -1$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = E$.

* * * * *

a) Az állítás igaz. Ugyanis $A^k = E$ miatt $\det(A^k) = 1$ adódik (mert $\det E = 1$). (1 pont)
A determinánsok szorzástételéből következik, hogy $\det(A^k) = (\det A)^k$. (2 pont)
Így $(\det A)^k = 1$, amiből $\det A = \pm 1$ valóban igaz. (2 pont)

b) Az állítás hamis; ennek igazolására mutatunk egy ellenpéldát.
Legyen például $A = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. (2 pont)

Ekkor $\det A = 0,5 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = 1,$ (1 pont)

de a mátrixszorzás definíciójából azonnal adódik, hogy $A^k = \begin{pmatrix} 0,5^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$ minden $k \geq 1$ egészre, vagyis $A^k = E$ semmilyen k-ra nem teljesül. (2 pont)

5.2. 2. zh., pontozási útmutató, 2012. november 22.

1. Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások minden olyan $n\times n$-es A mátrixra, amelynek van inverze.

a) Ha A első oszlopának minden eleme azonos, akkor A^{-1}-ben az elsőt kivéve minden sorban az elemek összege 0.

b) Ha A-ban az elsőt kivéve minden sorban az elemek összege 0, akkor A^{-1} első oszlopának minden eleme azonos.

* * * * *

a) Legyen A első oszlopának minden eleme α és jelölje az A^{-1} mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elemet $c_{i,j}$. Ekkor $\alpha \neq 0$, különben $\det A = 0$ volna és így A-nak nem volna inverze. (1 pont)
Mivel $A^{-1} \cdot A = E$ és az E első oszlopának minden eleme a legfelsőt kivéve 0, ezért a mátrixszorzás definíciója szerint $c_{i,1} \cdot \alpha + c_{i,2} \cdot \alpha + \ldots + c_{i,n} \cdot \alpha = 0$ igaz minden $2 \leq i \leq n$ esetén. (2 pont)
Ebből α-val való osztás után éppen azt kapjuk, hogy A^{-1}-nek az i-edik sorában ($i \geq 2$ esetén) az elemek összege 0. Vagyis az állítás igaz. (1 pont)

b) Jelölje most $\underline{z}$ az A^{-1} első oszlopát. Ekkor $A \cdot A^{-1} = E$ miatt $A \cdot \underline{z}$ az egységmátrix első oszlopával egyenlő – jelölje ezt $\underline{e}_1$. (1 pont)
Jelölje az A első sorában álló elemek összegét β. Ekkor $\beta \neq 0$, különben az A minden sorában az elemek összege 0 volna, más szóval A oszlopainak az összege $\underline{0}$ volna, vagyis A oszlopai lineárisan összefüggők volnának. Így (a tanultak miatt) $\det A = 0$ volna és így A-nak nem volna inverze. (1 pont)
Legyen $\underline{y}$ az az oszlopvektor, amelynek minden eleme $\frac{1}{\beta}$. Ekkor az $A \cdot \underline{y}$ oszlopvektor i-edik eleme (a mátrixszorzás definíciója szerint) az A mátrix i-edik sorában álló elemek összegének $\frac{1}{\beta}$-szorosa. Vagyis $A \cdot \underline{y} = \underline{e}_1$. (2 pont)
Ezek szerint az $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_1$ lineáris egyenletrendszernek megoldása $\underline{x} = \underline{y}$ és $\underline{x} = \underline{z}$ is. Mivel azonban $\det A \neq 0$, ezért (a tanultak szerint) az $A \cdot \underline{x} = \underline{e}_1$ lineáris egyenletrendszer megoldása egyértelmű, vagyis $\underline{z} = \underline{y}$. Így $\underline{z}$ minden eleme azonos (épp $\frac{1}{\beta}$), ez az állítás is igaz. (2 pont)

2. Megválasztható-e a p paraméter értéke úgy, hogy az alábbi mátrix rangja 3 legyen? Ha igen, hogyan?

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 9 & 4 & 11 \\ 0 & 5 & 7 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & p & p & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

* * * * *

Először tegyük fel, hogy $p \neq 0$. Ekkor a harmadik és negyedik sort p-vel, az első sort 3-mal, a másodikat 5-tel osztva lépcsős alakú mátrixot kapunk, amelyben 4 vezéregyes van. (2 pont)
Így ilyenkor a mátrix rangja 4 (mert a Gauss-eliminációt a redukált lépcsős alakig folytatva a vezéregyesek száma már nem változna meg). (2 pont)
Tegyük most fel, hogy $p = 0$. Ekkor a harmadik és negyedik sor csupa 0, elhagyásuk a rangot nem változtatja. (2 pont)
A maradék (és így az eredeti) mátrix rangja 2, mert az első sort ismét 3-mal, a másodikat 5-tel osztva két vezéregyessel bíró lépcsős alakot kapunk (és ez a redukált lépcsős alakban

is így maradna). (2 pont)
Következésképp a mátrix rangja p semmilyen értékére sem lesz 3. (2 pont)

3. Az $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés az $(1;2)$ vektorhoz a $(0;3;-3)$ vektort, a $(2;1)$-hez a $(3;3;0)$-t rendeli. Igaz-e az $(1;2;3) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ állítás?

* * * * *

Annak megállapításához, hogy $\mathcal{A}$ mit rendel egy tetszőleges $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vektorhoz, felírjuk (x,y)-t $(1;2)$ és $(2;1)$ lineáris kombinációjaként. Az $(x,y) = \alpha \cdot (1;2) + \beta \cdot (2;1)$ egyenletből $x = \alpha + 2\beta$ és $y = 2\alpha + \beta$ adódik, amiből (rövid számolás után) $\alpha = \frac{2y-x}{3}$ és $\beta = \frac{2x-y}{3}$ jön ki. (2 pont)
Ebből, felhasználva a lineáris leképezés definícióját:

$$\mathcal{A}\big((x,y)\big) = \mathcal{A}\left(\frac{2y-x}{3} \cdot (1;2) + \frac{2x-y}{3} \cdot (2;1)\right) =$$
$$\frac{2y-x}{3} \cdot \mathcal{A}\big((1;2)\big) + \frac{2x-y}{3} \cdot \mathcal{A}\big((2;1)\big) =$$
$$= \frac{2y-x}{3} \cdot (0;3;-3) + \frac{2x-y}{3} \cdot (3;3;0) = (2x-y; x+y; x-2y). \qquad (3 \text{ pont})$$

Így $(1;2;3) \in \operatorname{Im} \mathcal{A}$ akkor igaz, ha van olyan $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, amelyre $(2x-y; x+y; x-2y) = (1;2;3)$. (1 pont)
Azonban $2x - y = 1$ és $x + y = 2$ felhasználásával $x = 1$ és $y = 1$ adódik, de ezekre $x - 2y = 3$ nem teljesül. Így az állítás hamis. (4 pont)
Megjegyezzük, hogy a feladat megoldásához nincs feltétlen szükség $\mathcal{A}$ általános „képletének" felírására. Lehet úgy is érvelni, hogy mivel $(1;2)$ és $(2;1)$ bázist alkotnak a síkban, ezért minden $\underline{v}$ síkvektor felírható $\underline{v} = \alpha \cdot (1;2) + \beta \cdot (2;1)$ alakban. Ebből (hasonlóan a fentiekhez) $\mathcal{A}(\underline{v}) = \alpha \cdot \mathcal{A}\big((1;2)\big) + \beta \cdot \mathcal{A}\big((2;1)\big)$ adódik. Vagyis $\operatorname{Im} \mathcal{A} = \langle (0;3;-3), (3;3;0) \rangle$, így a feladat csak annak eldöntése, hogy $(1;2;3)$ ebben a generált altérben van-e.

4. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az a lineáris transzformáció, amely egy tetszőleges $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz az $(x+y; x+z; x+2y+2z)$ vektort rendeli.
a) Igaz-e, hogy az $(1;2;5)$ vektor sajátvektora $\mathcal{A}$-nak?
b) Van-e $\mathcal{A}$-nak pozitív sajátértéke?
(A feladat megoldásához nem szükséges megmutatni azt, hogy $\mathcal{A}$ valóban lineáris transzformáció.)

* * * * *

a) A feladatbeli képletből $\mathcal{A}\big((1;2;5)\big) = (3;6;15)$ adódik. Vagyis $\mathcal{A}\big((1;2;5)\big) = 3 \cdot (1;2;5)$. (2 pont)
Ez definíció szerint épp azt jelenti, hogy $(1;2;5)$ sajátvektora $\mathcal{A}$-nak. (3 pont)
b) A fentiekből az is kiderül, hogy $\lambda = 3$ sajátértéke $\mathcal{A}$-nak: valóban, van olyan $\underline{v} \neq \underline{0}$ vektor, amelyre $\mathcal{A}(\underline{v}) = 3 \cdot \underline{v}$ (nevezetesen $\underline{v} = (1;2;5)$). (4 pont)
Így $\mathcal{A}$-nak van pozitív sajátértéke. (1 pont)
Megjegyezzük, hogy további (és a feladat megoldásának szempontjából szükségtelen) munkával megkereshető $\mathcal{A}$ összes sajátértéke (például úgy, hogy $\mathcal{A}$ egy tetszőleges bázisban felírt mátrixának sajátértékeit keressük meg). Ebből kiderül, hogy $\mathcal{A}$-nak a 3-on kívül 1 és -1 is sajátértéke.

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenleteknek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része és a képzetes része is pozitív.
a) $(7-i) \cdot z = 19 + 33i$ b) $\sqrt{2} \cdot z^5 = -100000 - 100000i$

* * * * *

a) $(7-i)$-vel osztva: $z = \dfrac{19+33i}{7-i} =$ (1 pont)

$= \dfrac{(19+33i)(7+i)}{(7-i)(7+i)} =$ (1 pont)

$= \dfrac{100+250i}{50} = 2+5i$. A kapott megoldásnak pedig a valós és képzetes része (2 és 5) is pozitív. (2 pont)

b) $-100000 - 100000i = 10^5(-1-i) = 10^5 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos 225° + i \sin 225°)$. (1 pont)
Ebből $z^5 = 10^5\,(\cos 225° + i \sin 225°)$. (1 pont)
z tehát $\sqrt[5]{10^5\,(\cos 225° + i \sin 225°)}$ valamelyik értéke lehet csak. (1 pont)
Alkalmazva a tanult képletet: $z = 10\,(\cos(45° + k\cdot 72°) + i \sin(45° + k \cdot 72°))$ valamely $0 \le k \le 4$ értékre. (1 pont)
Ha a valós rész és a képzetes rész pozitív, akkor a szög 0° és 90° között van. Ez csak a $k=0$ esetben, a 45°-ra teljesül. (1 pont)
Így az egyetlen megoldás: $z = 10\,(\cos 45° + i \sin 45°) = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2}i$. (1 pont)

6. Hányféleképp lehet elhelyezni a sakktáblán 3 világos és 4 sötét gyalogot?
(A sakktábla 8×8-as. Egy mezőre természetesen nem lehet egynél több bábut tenni; ettől eltekintve a bábuk elhelyezésénél a sakk szabályaira nem kell tekintettel lenni. Két esetet akkor tekintünk különbözőnek, ha vagy van olyan mező, amin az egyik esetben nem áll bábu, a másikban igen, vagy van olyan mező, amin nem azonos színű bábuk állnak a két esetben. A végeredmény számszerű értékét megadni nem kell; azonban a megoldásból ki kell derüljön, hogy hogyan lehetne azt kiszámolni egy olyan számológéppel, ami *csak a négy alapműveletet ismeri*!)

* * * * *

Először válasszuk ki a 64 mező közül azt a hármat, ahová világos gyalogok kerülnek. A lehetőségek száma (az ismétlés nélküli kombinációnál tanultak szerint) $\binom{64}{3} = \frac{64\cdot 63\cdot 62}{1\cdot 2\cdot 3}$.
Most a maradék 61 mező közül kell kiválasztani azt a 4-et, ahová sötét gyalogok kerülnek.
A lehetőségek száma itt $\dbinom{61}{4} =$ (2 pont)

$= \dfrac{61\cdot 60\cdot 59\cdot 58}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$. (2 pont)

Mivel az először mondott $\binom{64}{3}$ lehetőség mindegyike $\binom{61}{4}$ féleképp folytatható a másodiknak mondott választással, ezért az összes lehetőségek száma $\dbinom{64}{3}\cdot\dbinom{61}{4} = \dfrac{64\cdot 63\cdot 62\cdot 61\cdot 60\cdot 59\cdot 58}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$. (3 pont)
Megjegyezzük, hogy ha a megoldás során először a sötét, utána a világos gyalogok helyét választjuk meg, akkor az eredményt $\binom{64}{4}\cdot\binom{60}{3}$ alakban kapjuk meg (azonos gondolatmenettel); ez azonban számértékét tekintve azonos a fentivel. Egy harmadik megoldási lehetőség volna, ha először azt a 7 mezőt választjuk ki, ahová gyalogok kerülnek, majd a választott 7 mező közül (például) azt a 3-at, ahová a világosak. Ekkor $\binom{64}{7}\cdot\binom{7}{3}$ alakban jön ki ismét csak ugyanaz az eredmény.

5.3. 1. pótzh., pontozási útmutató, 2012. december 3.

1. Egy síkra esnek-e a térben az $A(1;5;3)$, $B(7;11;-5)$, $C(10;14;-9)$ és $D(12;6;-15)$ pontok?

$*\quad*\quad*\quad*\quad*$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (7;11;-5) - (1;5;3) = (6;6;-8)$ (ahol O az origót jelöli) és hasonlóan $\overrightarrow{AC} = (10;14;-9) - (1;5;3) = (9;9;-12)$. (2 pont)
$\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ párhuzamosak (hiszen $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$), vagyis A, B és C egy egyenesre esnek. (4 pont)
Ebből következik, hogy tetszőlegesen választott D pont esetén (így a feladatban megadottra is) A, B, C és D egy síkra esnek. (4 pont)

$*\quad*\quad*\quad*\quad*$

Második megoldás.
Felírjuk az A, B és D pontok által meghatározott sík egyenletét. Ennek normálvektora lesz minden, az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokra egyaránt merőleges vektor. (1 pont)
Jó normálvektor lesz tehát például a $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ vektoriális szorzat. (1 pont)
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (7;11;-5) - (1;5;3) = (6;6;-8)$ (ahol O az origót jelöli) és hasonlóan $\overrightarrow{AD} = (12;6;-15) - (1;5;3) = (11;1;-18)$. (2 pont)
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$-t a tanult képlettel meghatározva:

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 6 & 6 & -8 \\ 11 & 1 & -18 \end{vmatrix} = (6\cdot(-18) - 1\cdot(-8))\underline{i} - (6\cdot(-18) - 11\cdot(-8))\underline{j} +$$

$+(6\cdot 1 - 6\cdot 11)\underline{k} = (-100;20;-60)$. Ehelyett használhatjuk normálvektornak a (-20)-adrészét, az $\underline{n} = (5;-1;3)$ vektort. (2 pont)
A kapott normálvektor és (például) A segítségével az ABD sík egyenlete már a tanult képlettel felírható: $5x - y + 3z = 9$. (2 pont)
Ebbe a C pont koordinátáit helyettesítve az egyenlet teljesül, így C rajta van ezen a síkon, vagyis a négy pont egy síkra esik. (2 pont)

2. Az $\mathbb{R}^5$-beli W altér álljon azokból a vektorokból, amelyekben a harmadiktól kezdve mindegyik koordináta az előtte álló két koordináta átlaga. Így például a $(-2;10;4;7;5;5{,}5)$ vektor W-beli. Határozzuk meg $\dim W$ értékét. (A feladat megoldásához nem szükséges megindokolni, hogy W valóban altér.)

$*\quad*\quad*\quad*\quad*$

Legyen $\underline{w} \in W$ egy tetszőleges elem, amelynek a felső két eleme α és β. Ekkor W definíciójából $\underline{w}$ felírható: $\underline{w} = (\alpha, \beta, \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta, \frac{1}{4}\alpha + \frac{3}{4}\beta, \frac{3}{8}\alpha + \frac{5}{8}\beta)^T$. (1 pont)
Ebből $\underline{w} = \alpha\cdot(1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8})^T + \beta\cdot(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8})^T$. (2 pont)
Ezért az $\underline{u} = (1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8})^T$ és a $\underline{v} = (0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8})^T$ vektorok generátorrendszert alkotnak W-ben. (3 pont)
$\underline{u}$ és $\underline{v}$ lineárisan függetlenek is, mert nem többszörösei egymásnak. (2 pont)
Így a fenti két vektort bázist alkot W-ben, (1 pont)
amiből $\dim W = 2$. (1 pont)
Megjegyezzük, hogy a feladat megoldásához valójában nincs szükség a fenti számolásokra. Ha $\underline{u}$ jelöli a W (egyetlen) $(1, 0, \ldots)^T$ kezdetű, $\underline{v}$ pedig a $(0, 1, \ldots)^T$ kezdetű elemét, akkor $\underline{w} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v}$ egyrészt W-beli elem (mert W altér), másrészt az első két eleme α, illetve

β; így $\underline{w}$ azonos W (egyetlen) $(\alpha, \beta, \ldots)^T$ kezdetű elemével. Már ez is mutatja, hogy $\underline{u}$ és $\underline{v}$ generátorrendszert alkot.

3. A p valós paraméter minden értékére döntsük el, hogy igaz-e az $\underline{e} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás az alábbi $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}, \underline{e} \in \mathbb{R}^3$ vektorokra.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \text{ és } \underline{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ p+4 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A generált altér definíciója szerint azt kell eldönteni, hogy léteznek-e olyan $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ skalárok, amelyekre $\alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c} + \delta\underline{d} = \underline{e}$ teljesül. (1 pont)
Behelyettesítve $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ és $\underline{e}$ konkrét értékét, a $2\alpha+4\beta+10\gamma-4\delta = 0$, $3\alpha+4\beta+9\gamma = -2$, $-\alpha + \gamma + p \cdot \delta = p + 4$ lineáris egyenletrendszerre jutunk. (1 pont)
Erre a Gauss-eliminációt alkalmazva:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 10 & -4 & 0 \\ 3 & 4 & 9 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & p & p+4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 6 & p-2 & p+4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & p+4 & p+2 \end{array}\right)$$ (2 pont)

Ha $p + 4 = 0$, akkor tilos sor keletkezik, így az egyenletrendszernek nincs megoldása. (2 pont)
Ha viszont $p+4 \neq 0$, akkor az utolsó sor $(p+4)$-gyel osztása után kapjuk a lépcsős alakot. Ebben az esetben tehát az egyenletrendszernek lesz megoldása, mert a redukált lépcsős alakig hátralévő lépések során „tilos sor" már nem keletkezhet. (3 pont)
Így az $\underline{e} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás pontosan akkor igaz, ha $p \neq -4$. (1 pont)

4. Határozzuk meg az alábbi determináns értékét.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 5 & 10 & 9 & 15 \\ 4 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$$

* * * * *

A determináns értékét a tanult módon, Gauss-eliminációval határozzuk meg:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & 8 \\ 5 & 10 & 9 & 15 \\ 4 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$-6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6 \cdot 3 = -18$$

Minden, a megoldás menetét érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. A determinánsra vonatkozó egyes alapismeretek teljes vagy részleges hiányából fakadó elvi hibák viszont darabonként 5 pont levonást jelentenek. Ilyen elvi hiba például, ha a megoldó egy sor konstanssal szorzása, vagy sorok cseréje után nem, vagy hibásan követi a determináns értékének megváltozását.

5. Az $n \times n$-es A mátrix első oszlopának minden eleme 1. A mátrix minden, nem az első sorban és nem az első oszlopban álló eleme a tőle balra és a felette található két elem összege. (Képletben: $a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$ minden $2 \leq i, j \leq n$ esetén.) Mutassuk meg, hogy $\det A = 1$.

* * * * *

Alulról fölfelé haladva az A minden sorából (az elsőt kivéve) vonjuk ki a fölötte állót; a kapott mátrix legyen A'. A tanultak szerint $\det A' = \det A$. (1 pont)
A' első oszlopában a legfelső 1-estől eltekintve minden elem 0. Így például a kifejtési tételből következik, hogy $\det A'$ megegyezik $\det B$-vel, ahol B az A' első sorának és első oszlopának elhagyásával kapott $(n-1) \times (n-1)$-es mátrix. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy B-re is fennállnak a feladatban A-ról mondott feltételek. Ebből már a mátrix sorainak és oszlopainak számára vonatkozó teljes indukcióval következni fog a feladat állítása: valóban, egyrészt $n = 1$ esetén nyilván igaz az állítás, másrészt $\det B = \det A$ miatt – ha B-re valóban teljesülnek a feltételek és így alkalmazható rá az indukciós feltevés – $\det A = 1$ is következik. (3 pont)
A második oszlopában az elemek fölülről lefelé haladva egyesével növekednek – ez következik az $a_{i,2} = a_{i-1,2} + a_{i,1}$ és az $a_{i,1} = 1$ feltételekből. Így az A'-t előállító lépések valóban csupa 1-est hoznak létre A' második oszlopában és így B első oszlopában is. (2 pont)
Válasszunk most ki A-ból 5 elemet, amelyek a következőképpen helyezkednek el egymáshoz képest: $\begin{pmatrix} & q \\ p & z \\ y & x \end{pmatrix}$. Ekkor a feladat feltételéből $z = p + q$ és $x = y + z$ következik.
Ezeket egymásból kivonva: $x - z = (y - p) + (z - q)$. Ez az egyenlet pedig valóban mutatja, hogy B-re is fennáll a feladatbeli második feltétel, mert az A' mátrixban x helyén $x - z$, y helyén $y - p$ és z helyén $z - q$ áll. (3 pont)

6. A 100×100-as A mátrix bal felső sarkában álló 50×50-es részmátrixának minden eleme 6, a jobb felső sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme -4, a bal alsó sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme 9, végül a jobb alsó sarokban álló 50×50-es részmátrix minden eleme -6. Határozzuk meg az A^{2012} mátrixot (vagyis annak a 2012 tagú szorzatnak az eredményét, amelynek minden tagja A).

* * * * *

A mátrixszorzás definíciója szerint az A^2 mátrix bal felső sarkában álló 50×50-es részmátrixának minden eleme $50 \cdot \big(6 \cdot 6 + (-4) \cdot 9\big) = 0$. (3 pont)
Hasonlóan, az A^2 jobb felső, bal alsó, illetve jobb alsó sarkában álló 50×50-es részmátrixának minden eleme is $50 \cdot \big(6 \cdot (-4) + (-4) \cdot (-6)\big) = 0$, $50 \cdot \big(9 \cdot 6 + (-6) \cdot 9\big) = 0$, illetve $50 \cdot \big(9 \cdot (-4) + (-6) \cdot (-6)\big) = 0$. (2 pont)
Így tehát $A^2 = \mathbf{0}$, ahol $\mathbf{0}$ a 100×100-as nullmátrixot jelöli (amelynek minden eleme 0). (1 pont)
Mivel a $\mathbf{0}$-val végzett szorzás mindig a $\mathbf{0}$-t adja eredményül, $A^{2012} = \mathbf{0}$ is igaz lesz.(4 pont)

5.4. 2. pótzh., pontozási útmutató, 2012. december 3.

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak; ha igen, akkor számítsuk ki A inverzét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ -1 & 3 & -6 \\ 2 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A^{-1}-et a tanult módon, Gauss-eliminációval számolva:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & -6 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \text{(8 pont)}$$

Így A^{-1} a fenti, a vonaltól jobbra eső mátrix. (2 pont)

Minden, a megoldás menetét érdemben nem befolyásoló számolási hiba 1 pont levonást jelent. Ha valaki csak annyit állapít meg, hogy $\det A = -1 \neq 0$, ezért az inverz létezik, de nem számolja ki, az 3 pontot ér. (Nem jár pontlevonás azért, ha valaki a fenti számolás után nem tér ki arra, hogy az inverz miért létezik – hiszen ez a módszer helyes működéséből implicite következik.) Ha látszik, hogy a megoldó a módszert elvileg ismeri, de nem tudja kivitelezni, az legföljebb 2 pontot érhet.

2. Nevezzük egy számsorozatot *félig számtaninak*, ha bármely eleméről a következőre átlépve a növekmény csak két különböző értéket vehet fel. (Így például a 3, 7, 11, 12, 16, 17, 18 sorozat félig számtani.) Az A mátrixra teljesül, hogy az első három sora félig számtani sorozatot alkot (vagyis a sor elemein balról jobbra végighaladva félig számtani sorozatot kapunk), az összes többi sora pedig számtani sorozatot alkot. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{r}(A) \leq 9$ (ahol r-rel a rangot jelöltük).

* * * * *

Jobbról balra haladva minden oszlopból (kivéve az elsőt) vonjuk ki a tőle balra állót. A kapott mátrixot jelölje B. A tanultak szerint $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A)$. (2 pont)
Mivel a negyediktől kezdve A minden sora számtani sorozatot alkot, ezért B-ben ezek a sorok a másodiktól kezdve csupa azonos elemet tartalmaznak (a megfelelő számtani sorozat differenciáját). (1 pont)
Hasonlóan, B első három sora olyan, hogy az első elemtől eltekintve csak két különböző érték fordul elő benne: a megfelelő félig számtani sorozat kétféle növekménye. (2 pont)
A fentiekből következik, hogy B oszlopai az elsőt leszámítva csak 8 különböző oszlopvektor közül kerülhetnek ki: az első három elem megválasztására mindig két-két lehetőség van, a negyediktől kezdve pedig már csak egy. (3 pont)
Így B-nek összesen 9 különböző fajta oszlopa lehet. Ebből pedig, felhasználva például az oszloprang definícóját, következik, hogy $\mathrm{r}(B) \leq 9$: valóban, B-ből 9-nél több oszlopot választva lesz köztük két azonos, így a választott oszlopok nem lesznek lineárisan függetlenek.

Így tehát $\mathrm{r}(A) \le 9$ is igaz. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a feladat állításánál valójában több is igaz: $\mathrm{r}(A) \le 5$ is teljesül a feladat feltételeinek megfelelő A mátrixra. Ez következik abból, hogy a megoldásban írt B mátrixból az első oszlopát elhagyva olyan B' mátrixot kapunk, amelynek a negyediktől kezdve minden sora csupa azonos elemből áll. Mivel bármely két ilyen sor közül az egyik a másiknak skalárszorosa, ezért (a sorrang definíciója miatt) $\mathrm{r}(B') \le 4$ következik. Visszavéve B első oszlopát kapjuk, hogy $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A) \le 5$.

3. Nevezzünk egy $\mathbb{R}^n$-beli oszlopvektort konstansnak, ha minden eleme azonos. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció és legyen B, illetve C két bázis $\mathbb{R}^n$-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n$ és $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n$ egyaránt konstans vektorok és az $[\mathcal{A}]_B$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor. Mutassuk meg, hogy ekkor az $[\mathcal{A}]_C$ mátrix minden oszlopa is konstans vektor.

* * * * *

Álljon a C a $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n$ vektorokból és legyen ezek közül egy tetszőlegesen választott $\underline{c}_i$.
Az $[\mathcal{A}]_C$ definíciója szerint azt kell megmutatnunk, hogy $[\mathcal{A}(\underline{c}_i)]_C$ (vagyis a $\underline{c}_i$ képének C szerinti koordinátavektora) konstans vektor. (1 pont)
A tanult tétel szerint $[\mathcal{A}(\underline{c}_i)]_B = [\mathcal{A}]_B \cdot [\underline{c}_i]_B$. (1 pont)
Mivel $[\mathcal{A}]_B$ minden oszlopa konstans, ezért $[\mathcal{A}]_B$ minden sora azonos, így (a mátrixszorzás definíciója miatt) $[\mathcal{A}]_B \cdot [\underline{c}_i]_B$ is konstans vektor lesz; legyen ennek minden eleme γ.(2 pont)
A fentiekből tehát $\mathcal{A}(\underline{c}_i) = \gamma \cdot (\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n)$, ahol $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ a B vektorai.(1 pont)
Mivel $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n$ és $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n$ egyaránt konstans vektorok, ezért létezik egy olyan λ szám, hogy $\underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \ldots + \underline{b}_n = \lambda \cdot (\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n)$, (2 pont)
hiszen $\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n$ nem lehet a nullvektor (mert C vektorai lineárisan függetlenek). (1 pont)
Ezt a fentibe helyettesítve: $\mathcal{A}(\underline{c}_i) = \gamma \cdot \lambda \cdot (\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + \ldots + \underline{c}_n)$. (1 pont)
Ez pedig épp azt jelenti, hogy $[\mathcal{A}(\underline{c}_i)]_C$ minden eleme $\gamma \cdot \lambda$, amivel az állítást beláttuk. (1 pont)

4. Határozzuk meg az alábbi mátrix minden sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez adjunk meg egy sajátvektort.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

* * * * *

A tanult tétel szerint λ akkor és csak akkor sajátértéke a mátrixnak, ha $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$, (1 pont)
azaz ha $(2-\lambda)(4-\lambda) - 1 \cdot 3 = 0$. (2 pont)
A kapott $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ másodfokú egyenletet megoldva: a sajátértékek $\lambda = 1$ és $\lambda = 5$. (1 pont)
Egy $\underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vektor definíció szerint akkor lesz a $\lambda = 5$ sajátértékhez tartozó sajátvektor, ha $A \cdot \underline{v} = 5 \cdot \underline{v}$ és $\underline{v} \ne 0$ (ahol A a feladatbeli mátrixot jelöli). (2 pont)
A mátrixszorzás definíciója szerint ez a $2x + y = 5x$, $3x + 4y = 5y$ egyenletrendszerre vezet. (2 pont)
Mindkét egyenletből $y = 3x$ adódik, vagyis sajátvektor lesz minden olyan, a nullvektortól különböző vektor, ami ennek a feltételnek megfelel. Így például 5-höz tartozó sajátvektor a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. (2 pont)

5. Adjuk meg algebrai alakban az alábbi egyenleteknek az összes olyan komplex megoldását, amelynek a valós része pozitív.

a) $\dfrac{22-21i}{z}=3-4i$ b) $z^3+125i=0$

* * * * *

a) Átrendezve: $z=\dfrac{22-21i}{3-4i}=$ (1 pont)

$=\dfrac{(22-21i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=$ (1 pont)

$=\dfrac{150+25i}{25}=6+i$. A kapott megoldásnak pedig a valós része (6) pozitív. (2 pont)

b) Átrendezve: $z^3=-125i$, így z a $\sqrt[3]{-125i}$ valamelyik értéke lehet csak. (1 pont)
$-125i=125\cdot(\cos 270^\circ+i\sin 270^\circ)$. (1 pont)
Alkalmazva a tanult képletet: $z=5\left(\cos\left(90^\circ+k\cdot 120^\circ\right)+i\sin\left(90^\circ+k\cdot 120^\circ\right)\right)$ valamely $0\le k\le 2$ értékre. (2 pont)
Ha a valós rész pozitív, akkor a szög vagy 0° és 90° között, vagy 270° és 360° között van. Ez csak a $k=2$ esetben, a 330°-ra teljesül. (1 pont)
Így az egyetlen megoldás: $z=5\left(\cos 330^\circ+i\sin 330^\circ\right)=\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}i$. (1 pont)

6. Egy kisváros 20 fős önkormányzati képviselőtestülete három különböző feladatra választ egy-egy bizottságot (legyenek ezek A, B és C). Mindhárom bizottság 4 fős és bármely képviselő több bizottságban is lehet tag, de azt nem szeretnék, ha két bizottságnak teljesen azonos volna a tagsága. További cél, hogy a polgármester (aki egyike a 20 képviselőnek) pontosan egy bizottságban legyen tag a három közül (de az mindegy, hogy melyikben). Hányféleképpen választhatják meg a három bizottságot?

* * * * *

Először eldöntjük, hogy a polgármester melyik bizottságban lesz tag; erre nyilván 3 lehetőség van. (1 pont)
Abba a bizottságba, amelyikbe került, a polgármester mellé a maradék 19 képviselő közül 3-at kell választani. Erre a lehetőségek száma nyilván $\dbinom{19}{3}=$ (1 pont)

$=\dfrac{19\cdot 18\cdot 17}{1\cdot 2\cdot 3}$. (1 pont)

Most kiválasztjuk A, B és C közül (például) az első olyannak a tagságát, amely még nem dőlt el. Mivel a polgármestertől különböző 19 képviselőből kell 4-et választanunk (mert a polgármester már több bizottságban nem lehet tag), a lehetőségek száma $\dbinom{19}{4}=$(2 pont)

$=\dfrac{19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$. (1 pont)

Végül kiválasztjuk a harmadik bizottság tagságát is. Itt is a polgármestertől különböző 19 képviselő közül választunk 4-et, de a lehetőségek száma most 1-gyel kevesebb, mint az előbb, mert pontosan ugyanazt a négy képviselőt már nem választhatjuk. Vagyis a lehetőségek száma most $\dbinom{19}{4}-1$. (2 pont)

Mivel az először mondott 3 lehetőség mindegyike $\binom{19}{3}$-féleképp folytatható a második választással; majd az így kapott $3\cdot\binom{19}{3}$ lehetőség mindegyike $\binom{19}{4}$-féleképp folytatható a harmadik választással; majd az így kapott $3 \cdot \binom{19}{3} \cdot \binom{19}{4}$ lehetőség mindegyike $\left(\binom{19}{4} - 1\right)$-féleképp folytatható az utolsó választással, az összes lehetőségek száma:

$$3 \cdot \binom{19}{3} \cdot \binom{19}{4} \cdot \left(\binom{19}{4} - 1\right) = 3 \cdot \frac{19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - 1\right).$$

(2 pont)