Bevezetés a számításelméletbe 1. gyakorlat
2. feladatsor (2002. febr. 22.)

1. Számítsuk ki az $A(1,3,5)$, a $B(2,0,1)$ és a $C(3,0,3)$ pontok által meghatározott háromszög S súlypontját! Határozzuk meg a térnek azon pontjait, melyek rajta vannak az ABC síkra az S pontban állított merőleges egyenesen! (Vizsga, 2001. jan.)

2. A valós együtthatós polinomok vektorterében alteret alkotnak-e az alábbi tulajdonságokkal rendelkező $P(x)$ polinomokból álló halmazok:

   (a) $\deg P = 5$

   (b) $\deg P \leq 5$

   (c) $\deg P \leq 5$ és $P(2) = 0$

   (d) $\deg P \leq 5$ és $P(2) = 0$ vagy $P(3) = 0$

   (e) $a_1 + a_0 = 0$, ahol a_1 az elsőfokú tag együtthatója, a_0 pedig a konstans tag

   (f) $x^2 + 1 \mid P(x)$

   (g) $P(x)$-nek van valós gyöke

3. Legyen V vektortér, és W a V egy nemtriviális altere. Melyek igazak az alábbi állítások közül (u, $v \in V$, $\lambda \in R$)?

   (a) $u + v \in W \Rightarrow u, v \in W$;

   (b) $\lambda \neq 0$, $\lambda \cdot v \in W \Rightarrow v \in W$;

   (c) $u \in W, v \notin W \Rightarrow u + v \notin W$;

   (d) $u \notin W, v \notin W \Rightarrow u + v \notin W$;

   (e) $u \notin W, v \notin W \Rightarrow u + v \in W$;

4. A valós számhármasok vektorterében alteret alkotnak-e azok az (x_1, x_2, x_3) vektorok, melyekre $x_1 = 2x_2 - 3x_3$? (ZH, 2000. nov.)

5. Döntsük el az alábbi állításokról, hogy igazak-e (a 3 dimenziós térben)?

   (a) $(1,1,1) \in \langle(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\rangle$

   (b) Az $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ vektorok generátorrendszert alkotnak.

   (c) Az $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ vektorok lineárisan függetlenek.

   (d) Az $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ vektorok bázist (lineárisan független generátorrendszert) alkotnak.

   (e) A $\{(2,2,0),(2,0,2),(2,1,1)\}$ vektorok generátorrendszert alkotnak.

   (f) A $\{(2,2,0),(2,0,2),(2,1,1)\}$ vektorok lineárisan függetlenek.

6. Melyek igazak az alábbi állítások közül? (A vektorok egy tetszőleges vektortérből valók.)

   (a) Ha $\{u_1, ..., u_{100}\}$ lineárisan független és $\{v_1, ..., v_{100}\}$ is lineárisan független, akkor $\{u_1, ..., u_{100}, v_1, ..., v_{100}\}$ is lineárisan független.

   (b) Ha $\{u_1, ..., u_{100}, v_1, ..., v_{100}\}$ lineárisan független, akkor $\{u_1, ..., u_{100}\}$ és $\{v_1, ..., v_{100}\}$ is lineárisan független.

(c) Ha $\{u_1, ..., u_{100}\}$ lineárisan független és $\{v_1, ..., v_{100}\}$ is lineárisan független, akkor $\{u_1 + v_1, ..., u_{100} + v_{100}\}$ is lineárisan független.

(d) Ha $\{u_1+v_1, ..., u_{100}+v_{100}\}$ lineárisan független, akkor $\{u_1, ..., u_{100}\}$ és $\{v_1, ..., v_{100}\}$ is lineárisan független.

(e) Ha $u_1, ..., u_{100}$ közül bármely 99 vektor lineárisan független, akkor $\{u_1, ..., u_{100}\}$ is lineárisan független.

(f) Ha $\{u_1, ..., u_{100}\}$ lineárisan független, akkor $\{u_1, u_1 + u_2, ..., u_1 + u_2 + ... + u_{100}\}$ is lineárisan független.

7. Tegyük fel, hogy egy V vektortér a, b, c és d elemeire $a + b + c + d = o$ teljesül. (o a vektortér nulleleme.) Melyek igazak az alábbiak közül?

   (a) $\langle a, b\rangle = \langle a, c\rangle$

   (b) $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle$

   (c) $\langle a, b, c\rangle = \langle a, c, d\rangle$

   (d) $\langle a, b, c\rangle = \langle a, d\rangle$

   (e) $\langle a, b, c\rangle \supseteq \langle a, d\rangle$

8. Tegyük fel, hogy egy V vektortér a, b és c elemeire $a \notin \langle b, c\rangle$, $b \notin \langle a, c\rangle$ és $c \in \langle a, b\rangle$. Határozzuk meg a c vektort!

9. Legyenek W_1, W_2 és W_3 alterek V-ben. Milyen kapcsolatban áll egymással

   (a) $\langle W_1, W_2\rangle \cap W_3$ és $\langle W_1 \cap W_3, W_2 \cap W_3\rangle$;

   (b) $\langle W_1 \cap W_2, W_3\rangle$ és $\langle W_1, W_3\rangle \cap \langle W_2, W_3\rangle$;

   (c) $W_1 \subseteq W_3$ esetén $\langle W_1, W_2\rangle \cap W_3$ és $\langle W_1, W_2 \cap W_3\rangle$?

10. Legyenek $v_1, v_2, ..., v_k$ lineárisan független vektorok. Adjuk meg a c paraméter összes olyan valós értékét, melyre a $v_1 - v_2, v_2 - v_3, ..., v_{k-1} - v_k, v_k - cv_1$ vektorok lineárisan függetlenek! (ZH. 1998. nov.)

11. Egy tetszőleges V vektortérben adott 2001 darab vektor, amelyekről tudjuk, hogy generátorrendszert alkotnak. Bizonyítsd be, hogy kiválsztható közülük néhány (esetleg mind, esetleg csak egy) úgy, hogy a kiválasztott vektorok bázist alkotnak!

12. Bizonyítsuk be, hogy ha egy vektortérnek van nemtriviális altere, akkor végtelen sok altere van!