Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2013. december 11.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása lenne kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az n hosszú 0-1-sorozatok. Két csúcs között pontosan akkor fusson él, ha a hozzájuk tartozó 0-1-sorozatok pontosan 2 helyen térnek el. (Tehát például $n = 4$ esetén $(0, 0, 0, 0)$ és $(1, 0, 1, 0)$ között fut él, $(0, 1, 1, 0)$ és $(1, 1, 1, 0)$ között nem.) Van-e G-ben Euler-körséta, ha $n = 8$?

* * * * *

Minden csúcsnak $\binom{8}{2} = 28$ darab szomszédja van, hiszen ennyiféleképpen lehet kiválasztani, hogy a nyolc közül melyik két helyen tér el egymástól a két sorozat. (Pl. a csupa 0 sorozat szomszédjai azok, amelyek pontosan 2 darab 1-est tartalmaznak.) A tanult tétel szerint egy (izolált csúcsot nem tartalmazó véges) gráf pontosan akkor tartalmaz Euler-körsétát, ha összefüggő, és minden csúcs foka páros, így azt kell megvizsgálni, hogy a gráf összefüggő-e. (3 pont)

Belátjuk, hogy nem az. Ehhez vizsgáljuk meg, hogy két szomszédos sorozatban, mondjuk $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_8)$-ban és $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_8)$-ban hogyan alakulhat az 1-esek száma. 6 helyen egyeznek, így ott persze az 1-esek száma is ugyanannyi. Ha a maradék két hely egyikén 0, másikán 1 van $\underline{a}$-ban, akkor $\underline{b}$-ben rendre 1, illetve 0 van, vagyis ugyanannyi 1-est tartalmaznak. Ha $\underline{a}$-ban mindkét helyen 0 van, akkor $\underline{b}$-ben mindkét helyen 1, azaz $\underline{b}$-ben pontosan kettővel több 1-es van, mint $\underline{a}$-ban. Ehhez hasonlóan, ha $\underline{a}$-ban ezen a két helyen 1-es van, akkor $\underline{b}$-ben mindkét helyen 0, vagyis $\underline{b}$-ben pontosan kettővel kevesebb 1-es van, mint $\underline{a}$-ban. Mindezek alapján vegyük észre, hogy szomszédos csúcsokban az 1-esek számának paritása ugyanaz, vagyis (legalább) két komponense van a gráfnak, az egyikben azok a sorozatok vannak, amelyek páros sok 1-est tartalmaznak, a másikban pedig azok, amelyek páratlan sokat. Tehát a gráfban nincs Euler-körséta. (7 pont)

Megjegyzés. Nem nehéz belátni, hogy valójában pontosan két komponens van, és mindkettőben $2^7 = 128$ csúcs van.

2. Legyen G egy 10 csúcsból álló hálózat (melyben nincsenek pontkapacitások, az élek irányítatlanok, és minden él kapacitása pozitív egész szám). Tudjuk, hogy az s-ből t-be vezető maximális folyam nagysága 1000. Az összes él kapacitását 1-gyel csökkentjük, és így kapunk egy új hálózatot. Lehetséges-e, hogy az így kapott új hálózatban a maximális folyam nagysága a) 1000 b) 999 c) 900 lesz?

* * * * *

A Ford-Fulkerson tétel szerint a maximális folyamnagyság megegyezik a minimális $s\bar{t}$-vágás (a továbbiakban csak röviden: vágás) értékével. Legyen C egy minimális vágás, ekkor az értéke $c(C) = 1000$, továbbá legyen C' egy tetszőleges vágás, ekkor értékére $c(C') \geq 1000$ teljesül. (1 pont)

Ha minden él kapacitását csökkentjük 1-gyel, akkor a C vágás értéke csökken, éspedig annyival, ahány él volt C-ben. (Ilyen él biztosan létezik, különben nem lenne út s-ből t-be, és eredetileg nem létezhetett volna 1000 nagyságú folyam.) Ez azt jelenti, hogy az új hálózatban létezik legfeljebb 999 értékű vágás (C), vagyis a feladat a) kérdésére nemleges a válasz. (2 pont)

(Az előzőek szerint b) esetben is csak akkor lehet „igen” a válasz, ha az új hálózat minimális vágása egyetlen élt tartalmaz.) A b) kérdésre a válasz „igen”, egy lehetséges konstrukció például a következő: a hálózatot alkotó gráf egyetlen s-ből t-be vezető út, amely minden élének kapacitása 1000. Világos, hogy ekkor kezdetben 1000 a maximális folyamnagyság, a kapacitások 1-gyel való csökkentése után pedig 999 lesz. (Sok konstrukció van, aki olyat mutat, ahol nem magától értetődő, hogy teljesülnek a feltételek, ott persze részletesen indokolni kell.) (3 pont)

Tegyük fel, hogy a C' vágásnál az s-et tartalmazó pontosztály elemszáma k, ekkor a t-t tartalmazó pontosztály elemszáma $10 - k$. Azaz C'-ben legfeljebb $k(10 - k)$ él lehet, és így a C' vágás értéke is legfeljebb $k(10 - k)$-val csökken, ha minden él kapacitását 1-gyel csökkentjük. A számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján, vagy bármilyen más módszerrel a $k(10 - k)$ másodfokú kifejezés maximumát vizsgálva látható, hogy $k(10 - k) \leq 5 \cdot 5 = 25$. Azonban a feladat c) részének megoldásához valójában elegendő a triviális $k(10 - k) < 10 \cdot 10 = 100$ becslés. (2 pont)
Ez ugyanis azt jelenti, hogy C' értéke az új hálózatban nagyobb, mint 1000-100=900 (az erősebb becslésből az is kiderül, hogy legalább 975), hiszen eredetileg legalább 1000 volt, és kevesebb, mint 100-zal (legfeljebb 25-tel) csökkenhetett. Tehát minden vágás értéke nagyobb, mint 900, így a Ford-Fulkerson tétel szerint a maximális folyam nagysága is nagyobb, mint 900 (legalább 975). Tehát c)-re is „nem” a válasz. (2 pont)

3. A G gráf csúcsai egy kocka csúcsai. Két csúcs között pontosan akkor fusson él, ha a kocka megfelelő csúcsai által meghatározott szakasz a kockának vagy éle, vagy lapátlója. Mi G kromatikus száma?

* * * * *

Először is vegyük észre, hogy két csúcs között pontosan akkor nem fut él, ha azok a kocka egy testátlóját alkotják, más szavakkal a gráf komplementere 4 független élből áll. (3 pont)
Ebből egyrészt következik az, hogy G 4 színnel színezhető: bármely testátlóra igaz, hogy a két végpontját színezhetjük egyforma színűre, így a 4 testátló 4×2 végpontjához összesen 4 színt felhasználva jó színezést kapunk. (3 pont)
Másrészt, ha két csúcs különböző testátlóra illeszkedik, akkor nem kaphatják ugyanazt a színt, vagyis – mivel 4 testátló van, ezért – legalább 4 szín szükséges G csúcsainak kiszínezéséhez.
Másik lehetséges érvelés: bármely lap 4 csúcsa K_4-et alkot G-ben, így G kromatikus száma legalább 4. (3 pont)
Tehát G kromatikus száma 4. (1 pont)

Persze másmilyen érvelések is elképzelhetők (pl. a jó 4-színezés lerajzolása), $\chi(G) \leq 4$ helyes bizonyításáért 5 pont adható, $\chi(G) \geq 4$ helyes bizonyításáért szintén 5 pont adható.

4. Legyen G egy 100 csúcsú egyszerű gráf. Lehet-e
 a) $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G}) = 98$
 b) $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G}) = 99$?
(χ_e az élkromatikus számot, $\overline{G}$ pedig G komplementerét jelöli.)

* * * * *

Legyen v egy tetszőleges csúcs, és a fokszáma legyen $d(v) = k$. A v-ből induló k darab élt páronként különböző színűre kell színeznünk, ezért $\chi_e(G) \geq k$. Mivel $\overline{G}$-ben v fokszáma $\overline{d}(v) = 99-k$, ezért ehhez hasonlóan $\chi_e(\overline{G}) \geq 99 - k$ is teljesül. Így $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G}) \geq k + 99 - k = 99$, vagyis az a) kérdésre nemleges a válasz.
Ugyanez kicsit másképpen: $\chi_e(G) + \chi_e(\overline{G}) \geq \Delta(G) + \Delta(\overline{G}) \geq d(v) + \overline{d}(v) = 99$. (3 pont)
Belátjuk, hogy a b) eset viszont lehetséges, ehhez elég igazolni, hogy $\chi_e(K_{100}) = 99$, hiszen az üres gráf élkromatikus száma persze 0. Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy K_{100} élhalmaza felbomlik 99 darab páronként éldiszjunkt teljes párosításra. (3 pont)
Legyenek a K_{100} gráf csúcsai egy szabályos 99-szög csúcsai és a középpontja. A teljes párosítások pedig legyenek a következők: az i-edik párosítás álljon az O középpontot a 99-szög A_i csúcsával összekötő szakaszból, és a 99-szög OA_i-re merőleges átlóiból. Nem nehéz meggondolni, hogy ez valóban teljes párosítás (bármelyik A_i csúcsot is választjuk), továbbá ezek a párosítások páronként éldiszjunktak. (4 pont)
Természetesen bármilyen más helyes konstrukció (és megfelelő indoklás) is 7 pontot ér a b) résznél.
Megjegyzés. Az is meggondolható, hogy b) csak úgy fordulhat elő, hogy G valamely k-ra olyan k-reguláris gráf, amelyre $\chi_e(G) = k$, és $\overline{G}$ olyan $99-k$-reguláris gráf, amelyre $\chi_e(\overline{G}) = 99-k$. Ez egyben azt is jelenti, hogy G úgy kapható, hogy K_{100} éleinek valamelyik szabályos 99-színezésénél kiválasztunk néhány színt, és az ilyen színű élek lesznek G élei. Más szavakkal: K_{100} élhalmazát felbontjuk 99 darab teljes párosításra, és néhány párosítás uniója lesz G. Ebből az is kiderül, hogy ha valaki b)-nél olyan példát szeretne adni, ahol sem G, sem $\overline{G}$ nem az üres gráf, akkor pl. azt csinálhatja, hogy a megoldásban megkonstruált párosítások közül az egyikben szereplő élek lesznek G élei.

5. A $G(A, B; E)$ páros gráf két pontosztálya legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$ és $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_8\}$. Minden $1 \leq i, j \leq 8$ esetén az a_i akkor legyen szomszédos b_j-vel, ha az alábbi mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának kereszteződésében álló elem 1-es. Adjunk meg G-ben egy maximális párosítást!

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}$$

* * * * *

Van 6 élből álló párosítás, pl. $a_1b_1, a_2b_2, a_4b_4, a_5b_6, a_6b_8, a_7b_7$ (de van sok másik is). Ezt pl. a javító utas algoritmussal is megkereshetjük, de az is megfelelő, ha valaki ad hoc módszerrel talál rá egy ilyenre. (3 pont)
A maradék 7 pont annak igazolásáért jár, hogy ez a párosítás maximális. Ennek igazolása sokféleképpen történhet, néhány lehetőség:
1) Ha valaki a javító utas algoritmussal dolgozott, akkor a 6 élből álló párosítás után már nem lesz javító út, ami igazolja annak maximális voltát.
2) a_1 és a_3 csak b_1-gyel szomszédos, így egyszerre nem párosíthatók, továbbá $\{a_6, a_7, a_8\}$-ra is sérül a Hall-feltétel, hiszen szomszédságuk csak kételemű: $\{b_7, b_8\}$, vagyis egyszerre a_6, a_7, a_8 sem párosítható. Ez azt jelenti, hogy legalább 2 párosítatlan csúcs marad A-ban, vagyis nincs 7 élből álló párosítás.
3) $\{a_2, a_4, a_5, b_1, b_7, b_8\}$ egy 6 csúcsból álló lefogó ponthalmaz, így a maximális párosítás mérete legfeljebb 6.

6. Legyenek a G gráf csúcsai egy 5×5-ös táblázat mezői, és két különböző csúcs között pontosan akkor fusson él, ha a nekik megfelelő mezőknek van legalább egy közös pontja (azaz a mezők él-, vagy csúcsszomszédosak). Határozd meg G-ben a független élek maximális számát ($\nu(G)$), a lefogó élhalmaz minimális elemszámát ($\varrho(G)$), a független ponthalmaz maximális elemszámát ($\alpha(G)$) és a lefogó ponthalmaz minimális elemszámát ($\tau(G)$).

* * * * *

Számozzuk a mezőket a sakktábla bal alsó 5×5-ös része szerint: $A1, A2, \ldots, A5, B1, \ldots, E5$. Nem nehéz találni 12 élből álló párosítást, pl. $A1B1$, $C1D1$, $A2B2$, $C2D2$, $A3B3$, $C3D3$, $A4B4$, $C4D4$, $A5B5$, $C5D5$, $E1E2$, $E3E4$, és világos, hogy ez maximális, ugyanis csak 25 csúcsunk van, míg 13 független élnek már összesen 26 végpontja lenne. Tehát $\nu(G) = 12$. (2 pont)

Nem nehéz találni 9 pontból álló független ponthalmazt: $A1, A3, A5, C1, C3, C5, E1, E3, E5$. (2 pont)

Most belátjuk, hogy ennél több pontból álló független élhalmaz nem létezik. Egy független ponthalmazba G egyik teljes részgráfjának sem kerülhet be egynél több csúcsa. Így állításunk igazolásához elég G csúcsait 9 részre úgy szétosztani, hogy mindegyik rész teljes részgráfot alkosson:

$$\{A1, B1, A2, B2\}, \{C1, D1, C2, D2\}, \{A3, B3, A4, B4\}, \{C3, D3, C4, D4\},$$

$$\{A5, B5\}, \{C5, D5\}, \{E1, E2\}, \{E3, E4\}, \{E5\}$$

Tehát $\alpha(G) = 9$. (4 pont)

A gráf sem hurokélt, sem izolált csúcsot nem tartalmaz, így a Gallai tételek szerint

$$\tau(G) = 25 - \alpha(G) = 16$$

$$\rho(G) = 25 - \nu(G) = 13.$$

(1+1 pont)