Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2013. október 28.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása lenne kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 13$ számok, és az egymástól különböző i és j csúcsok között pontosan akkor fusson él, ha az ij szorzat osztható 3-mal.

a) Van-e G-ben Euler-körséta?

b) Van-e G-ben Hamilton-kör?

* * * * *

a) A válasz: igen. Egy véges gráfban pontosan akkor van Euler-körséta, ha összefüggő és minden csúcs foka páros. (1 pont)

G-ben az összes 3-tól különböző csúcs össze vannak kötve a 3-mal, így G összefüggő. (1 pont)

Ha az i csúcs osztható 3-mal, akkor az összes többi csúccsal össze van kötve, vagyis 12 a foka, ami páros. (1 pont)

Ha i nem osztható 3-mal, akkor csak a 3-mal oszthatókkal (3, 6, 9, 12) van összekötve, tehát 4 a foka, ami szintén páros. Tehát G-ben van Euler-körséta. (2 pont)

b) A válasz: nem. Két csúcs pontosan akkor szomszédos, ha legalább az egyikük 3-mal osztható, vagyis a 3, 6, 9, 12 számok valamelyike. (2 pont)

Így a 3, 6, 9, 12 csúcsokat elhagyva a gráf 9 komponensből fog állni (9 db izolált pont), így a tanult feltétel szerint nincs benne Hamilton-kör. (3 pont)

2. A G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \dots, 200$ számok, és az egymástól különböző i és j csúcsok között pontosan akkor fut él, ha a következő feltételek közül legalább az egyik teljesül: (a) i és j is legfeljebb 100, (b) i és j is legalább 101, (c) $|i - j| = 100$.

Igaz-e, hogy G perfekt?

* * * * *

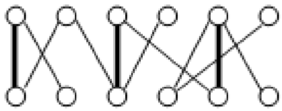
A gyenge perfekt gráf tétel szerint G pontosan akkor perfekt, ha G komplementere perfekt. (2 pont)

A G gráf komplementere egy páros gráf: a két független csúcshalmaz $\{1, 2, \dots, 100\}$ és $\{101, 102, \dots, 200\}$. (5 pont)

Előadáson szerepelt, hogy minden páros gráf perfekt, így G is perfekt. (3 pont)

(Itt ha valaki csak „listázza" az előadáson tanult perfekt gráfokkal kapcsolatos állításokat, de nem tudja alkalmazni őket, akkor a 2+3 pont nem/sem jár.) Másik lehetséges megoldás: legyen F a csúcsok olyan részhalmaza által feszített részgráf, amely az $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ halmazból k darab, a $B = \{101, 102, \ldots, 200\}$ halmazból l darab csúcsot tartalmaz. G perfektségéhez az kell, hogy ekkor $\omega(F) = \max(k, l) = \chi(F)$, sőt valójában elég $\omega(F) \geq \max(k, l) \geq \chi(F)$ (hiszen $\chi(F) \geq \omega(F)$ automatikusan teljesül). Ha tehát valaki ezek után belátja, hogy a gráf $\max(k, l)$-színezhető, és tartalmaz $\max(k, l)$ méretű klikket, akkor az értelemszerűen 10 pont, ha viszont az előbbi két állítás közül csak az egyiket sikerül igazolnia, akkor az 5 pont.

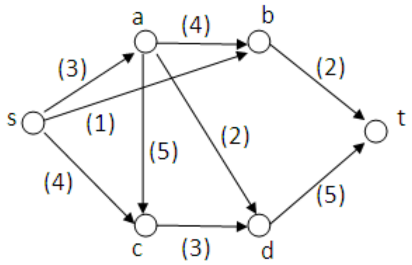
3. Az ábrán látható G gráfban keressünk maximális párosítást a *javító utas algoritmussal* a vastag vonalakkal jelölt párosításból kiindulva, valamint adjunk meg egy minimális lefogó ponthalmazt is.



* * * * *

A javító utas algoritmusnál először a párosítást bővítjük egy 4. független éllel, (2 pont)
utána keresünk egy javító utat, és ennek segítségével 1-gyel növeljük a párosítás méretét, (2 pont)
majd ezután ismét lesz még javító út a gráfban, ami szerint javítva már teljes párosítást (ami persze maximális) kapunk. (3 pont)
Mivel a gráfban van 6 élből álló párosítás, ezért egy lefogó ponthalmaz elemszáma legalább 6, ugyanakkor pl. a felső ponthalmaz nyilván lefogja az összes élt, így az egy minimális lefogó ponthalmaz. (3 pont)
Ha valaki máshogyan talál maximális párosítást és minimális lefogó ponthalmazt (és igazolja ezek maximális/minimális voltát), arra összesen 3 pontot kaphat.

4. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot s-ből t-be, és adjunk meg egy minimális vágást is.



* * * * *

A javító utas algoritmust futtatva (néhány lépés után) találunk egy 7 nagyságú folyamot, ami maximális, mert már nincs javító út s-ből t-be. (Itt a kiindulási folyam, illetve a javító utak megválasztása szerint persze sokféle folyamsorozat lehetséges.) (7 pont)
Az előbb talált 7 nagyságú folyamnál s-ből javító úton elérhető csúcsok halmaza (s, c) minimális vágást határoz meg. (3 pont)
Az is teljes pontszámot ér, ha valaki mutat maximális folyamot (bizonyítva a maximalitást) és minimális vágást (bizonyítva a minimalitást). 7 nagyságú folyam megtalálása 2 pontot ér, 7 értékű vágás megtalálása 2 pontot ér, ha valaki mindkettőt megtalálja, és meg is magyarázza, hogy ebből már következik, hogy a 7 nagyságú folyam maximális, a 7 értékű vágás pedig minimális, az már teljes megoldás.

5. A 10 csúcsú teljes gráfból elhagyjuk egy 5 hosszú kör éleit. Mennyi a kapott gráf kromatikus száma?

* * * * *

Mivel az 5 hosszú körnek a komplementere is egy 5 hosszú kör, ezért a feladatban szereplő gráfra úgy is tekinthetünk, hogy egy 5 hosszú körben szereplő összes csúcsot összekötöttünk 5 másik csúccsal,

amelyek egymással is össze vannak kötve. (2 pont)
Az 5 hosszú kör kromatikus száma 3 (lehetséges indoklások pl.: szerepelt előadáson, vagy: legalább három ugyanis nem páros + jó 3-színezés könnyen megadható). (2 pont)
Az 5 másik csúcsnak mindenképpen páronként különböző színűnek kell lennie (hiszen K_5-öt alkotnak), ráadásul egyetlen egy olyan színt sem használhatunk, amelyet az 5 hosszú körnél használtunk, hiszen az 5 hosszú kör minden csúcsa össze van kötve az 5 másik csúcs mindegyikével. Ez azt jelenti, hogy egy szabályos színezésnél az 5 másik csúcs szükségképpen 5 új színt kap, így a kromatikus szám legalább 8. (3 pont)
Sőt, az is igaz, hogy az 5 hosszú kör egy jó 3-színezését az 5 másik csúcs 5 új színnel való kiszínezésével folytatva a gráf egy jó 8-színezését kapjuk. Tehát a kromatikus szám 8. (3 pont)

6. A 9 csúcsú G gráfot úgy kaptuk, hogy egy szabályos kilencszögben behúztuk a legrövidebb átlókat. Mi a legnagyobb k, amelyre a G gráf k-szorosan élösszefüggő?

* * * * *

A G gráf minden csúcsából 4 él indul, ezért G nem 5-szörösen élösszefüggő (hiszen elhagyva egy tetszőlegesen kiválasztott csúcsából kiinduló 4 élt, több komponensre esik szét). (3 pont)
Ugyanakkor megfigyelhetjük, hogy nem csak az oldalak, hanem a legrövidebb átlók is egy 9 hosszú kört alkotnak, így a gráf élhalmaza felbomlik két kilenc hosszú körre. (2 pont)
Mindkét körből legalább 2-2 élt el kell hagyni, hogy a gráf szétessen több komponensre, hiszen a kör 2-szeresen élösszefüggő. Ez azt jelenti, hogy legfeljebb három él elhagyása esetén a gráf még biztosan összefüggő marad. Tehát a gráf 4-szeresen élösszefüggő, és így a feladat által keresett legnagyobb k érték $k = 4$. (5 pont)