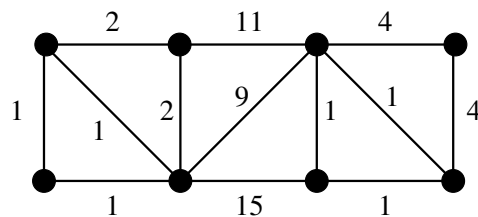


1. Határozzunk meg egy minimális összsúlyú feszítőfát a jobbra látható élsúlyozott gráfban.



2. a) Létezik-e olyan síkbarajzolt gráf, amelyben a csúcsok, az élek és a tartományok száma is hárommal osztható?

b) Létezik-e ugyanilyen tulajdonságokkal összefüggő gráf is?

3. Rajzoljuk fel az összes 3, 4, illetve 5 pontú fát. (Az izomorfakat csak egyszer.)

4. Legyen G a 100 csúcsú teljes gráf a $V(G) = \{1, 2, \dots, 100\}$ csúcshalmazon. Minden $1 \leq i, j \leq 100$, $i \neq j$ esetén legyen az $\{i, j\}$ él súlya az i és j értékek közül a nagyobb. Mennyi erre a súlyfüggvényre nézve egy minimális összsúlyú feszítőfa súlya G -ben? Adjunk meg egy ilyen fát.

5. Egy konvex poliédernek (vagyis síklapok által határolt testnek) 20 csúcsa és 12 lapja van. A poliéder minden lapját ugyanannyi él határolja. Mennyi ez a közös érték?

6. Egy fában minden pont foka 1, 2 vagy 3. Hány 1 fokú pontja van, ha a 3 fokú pontjainak száma 100? (ZH, 2004. december 16.)

7. Mutassuk meg, hogy minden összefüggő gráfban van olyan csúcs, amelyet a gráfból elhagyva (az összes rá illeszkedő éllel együtt) ismét összefüggő gráfot kapunk.

8. Az n csúcsú G gráf nem tartalmaz kört, a komponenseinek száma k . Hány éle van G -nek?

9. Legyen G a 100 csúcsú teljes gráf a $V(G) = \{1, 2, \dots, 100\}$ csúcshalmazon. Minden $1 \leq i, j \leq 100$, $i \neq j$ esetén legyen az $\{i, j\}$ él súlya 1, ha $i \leq 50$ és $j \leq 50$; legyen az $\{i, j\}$ él súlya 2, ha $i \geq 51$ és $j \geq 51$; végül minden más él súlya legyen 3. Mennyi erre a súlyfüggvényre nézve egy minimális összsúlyú feszítőfa súlya G -ben? Adjunk meg egy ilyen fát.

10. Egy konvex poliéder minden lapja (nem feltétlen szabályos) négyszög vagy nyolcszög. Tudjuk továbbá, hogy a poliéder minden csúcsában pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és a nyolcszöglapok számának a különbsége? (ZH, 2000. január 12.)

11. Egy fában a legnagyobb fokú csúcs foka Δ . Bizonyítsuk be, hogy a fának legalább Δ darab 1 fokú csúcsa van.

12. Egy fában csak két különböző fokszám fordul elő: az egyik fajta 9-szer, a másik 92-szer. Mi a szóban forgó két fokszám? (ZH, 2010. november 25.)

13. Egy élsúlyozott, összefüggő G gráfban minden él súlya legfeljebb 100. Tudjuk, hogy G -ben van olyan minimális összsúlyú feszítőfa, ami tartalmaz 100 súlyú élet. Mutassuk meg, hogy ekkor G minden (nem feltétlen minimális összsúlyú) feszítőfája is tartalmaz 100 súlyú élet.

14. Határozzuk meg az összes olyan (legalább két csúcsú) fát, amely izomorf a saját komplementerével. (Az egymással izomorf megoldásokat tekintjük azonosnak.) (ZH, 2008. december 2.)

15. Legyen G összefüggő gráf és $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ súlyfüggvény G élein. Mutassuk meg, hogy G minden (w -re nézve) minimális összsúlyú feszítőfája megkapható, mint a Kruskal-algoritmus egyik lehetséges futásának az eredménye.