Bevezetés a Számításelméletbe II. — Nyolcadik gyakorlat
16. kurzus, 2013. április 9.

1. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész számot, ami osztható 6-tal és pontosan 9 osztója van. (ZH, 2010. április 22.)

2. Milyen maradékot adhat egy egész szám 92-vel osztva, ha az 54-szerese 24 maradékot ad 92-vel osztva? (ZH, 2003. április 30.)

---

3. Legyen n páratlan egész szám, amely nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem. Bizonyítsuk be, hogy n pozitív osztóinak átlaga egész szám! (ZH, 2003. április 30.)

4. Oldd meg az alábbi lineáris kongruenciákat!
a) $5x \equiv 2 \quad (11)$
b) $26x \equiv 16 \quad (34)$
c) $104x \equiv 74 \quad (60)$
d) $40x \equiv 28 \quad (62)$

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c, d, e és f egész számokra

$$(a+b, c+d, e+f) | ace + bdf$$

teljesül (ahol a gömbölyű zárójel a legnagyobb közös osztót jelöli).

6. a) Egy százlábú meg akarja számolni a lábait. Azt tudja biológiából, hogy minden százlábúnak legföljebb 344 lába van. Ha 13-asával számolja a lábait, akkor 3 marad ki, ha 17-esével számolja, akkor viszont 10 marad ki. Hánylábú a százlábú?
b) Egy másik százlábú is megirigyli ezt a módszert. Neki 16-osával számolva 5 marad ki, 20-asával számolva pedig 15 marad ki. Bizonyítsd be, hogy elszámolta magát!
c) A százlábúak királyához is eljut a módszer. Neki 6-osával számolva 5 marad ki, 7-esével számolva 6, 8-asával számolva pedig 7. Neki hány lába van?

7. Léteznek-e olyan x és y pozitív egész számok, amelyekre $20x + 51y = 2012$ teljesül? Ha igen, adjuk meg az összes ilyen számpárt!

---

8. a) Milyen számok állíthatók elő $20x + 51y$ alakban, ahol x és y egész számok?
b) Milyen számok állíthatók elő $170x + 51y$ alakban, ahol x és y egész számok?
c) Milyen számok állíthatók elő $21x + 33y + 77z$ alakban, ahol x, y és z egész számok?

9. Oldd meg az alábbi lineáris kongruenciákat!
a) $30x \equiv 48 \quad (58)$
b) $39x \equiv 1 \quad (100)$
c) $170x \equiv 78 \quad (2006)$ (ZH, 2004. április 29.)

10. Határozzuk meg az x kétjegyű egész számot, ha tudjuk, hogy $34x + 5$ utolsó két számjegye, valamint $17x + 10$ utolsó két számjegye megegyezik. (ZH, 2005. május 5.)

11.a) Milyen maradékot adhat egy egész szám 142-vel osztva, ha a 83-szorosa 1 maradékot ad 142-vel osztva? (ZH, 2011. április 21.)
b) Egy n egész számra teljesül, hogy $50n$ és $n + 1$ azonos maradékot ad 178-cal osztva. Mi lehet ez a közös maradék? (ZH, 2011. május 9.)
c) Milyen maradékot adhat az n egész szám 202-vel osztva, ha $53n-1$ osztható 202-vel? (ZH, 2011.05.17.)
d) Határozzuk meg mindazon n egész számokat, melyekre $3n + 1 \equiv 6 \pmod{2n}$ teljesül. (ZH, 2008)

12*. Pataki Ferenc fejszámolóművész egyszer a tévében a következő trükköt mutatta be: felkért a közönségből valakit, hogy gondoljon egy háromjegyű számra, szorozza meg 6561-gyel, majd az eredmény utolsó három jegyét közölje. Ebből ő pillanatok alatt kitalálta a gondolt számot. Hogyan csinálta? Utána tudnád-e csinálni, ha használhatsz számológépet, de csak nagyon rövid ideig?

13*. Lásd a következő oldalon!

13.a) Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai „kétállásúak”: ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárakkal játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a k-adik feleség minden k-adik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések? (*Ne* mindenféle trükkös körülírásait add meg a cellák sorszámainak, hanem sorold fel az összeset!)

b) A sah következő születésnapján a feleségek megint rosszalkodnak. Most az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján kettőt fordít, stb., a k-adik feleség minden k-adik ajtó zárján k-t fordít, egészen a 100. feleségig. Most milyen sorszámú cellák lakói szabadulnak?