

1. Az alábbi A mátrix egy G irányítatlan gráf szomszédossági mátrixa, a B mátrix pedig egy H hurokélmentes, irányított gráf illeszkedési mátrixa. Adjuk meg mindkét mátrixban a hiányzó (\square -val jelölt) elemeket és rajzoljuk le a G és a H gráfot! (ZH, 2011. április 21.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \square & 0 \\ \square & 0 & 1 & \square \\ 2 & \square & 0 & \square \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \square & 1 & 0 \\ \square & 0 & \square & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \square & \square \end{pmatrix}$$

2. A 100×100 -as A mátrixban a bal alsó sarokban, a jobb felső sarokban és a közvetlenül a főátló alatti és fölötti helyeken álló elemek 1-esek, a mátrix összes többi (9800 darab) eleme 0. (A -ban tehát az 1-es elemek az $a_{100,1}$, az $a_{1,100}$ és $a_{i,i+1}$ valamint $a_{i+1,i}$ minden $1 \leq i \leq 99$ -re.) Hány darab 0 eleme van az A^{60} mátrixnak? (ZH, 2012. május 15.)

3. Egy öt csúcsú egyszerű gráf szomszédossági mátrixának harmadik hatványában a főátló elemeinek szorzata 64. Mutassuk meg, hogy a gráf kétszeresen élösszefüggő. (ZH, 2012. április 19.)

4. Egy G egyszerű gráf minden csúcsában lakik egy bogárka. Egy adott pillanatban minden bogárka felkerekedik és átköltözik a gráf egy, a jelenlegi lakhelyével szomszédos csúcsába. A bogárkák ezt úgy szeretnék megtenni, hogy végül ismét minden csúcsban egyetlen bogárka lakjon. Bizonyítsuk be, hogy ha G szomszédossági mátrixának a determinánsa nem nulla, akkor a bogárkák terve megvalósítható! (ZH, 2012. május 7.)

5. A 100 csúcsú, hurokélmentes G gráf szomszédossági mátrixát jelölje A . Mutassuk meg, hogy ha az A^{14} mátrix főátlójában álló elemek összege 10^9 -nél kisebb, akkor G -nek van olyan csúcsa, amelynek a foka legföljebb 9. (ZH, 2011. május 9.)

6. Legyen G irányítatlan, hurokélmentes gráf és legyen H egy olyan irányított gráf, amelyet G -ből nyerünk úgy, hogy mindegyik élit irányítjuk (valamelyik irányba). Legyen továbbá B a H illeszkedési mátrixa. Rajzoljuk le a G gráfot, ha tudjuk, hogy a $B \cdot B^T$ mátrix az alábbi:

$$B \cdot B^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ahol B^T a B mátrix transzponáltját jelöli. (ZH, 2011. május 17.)