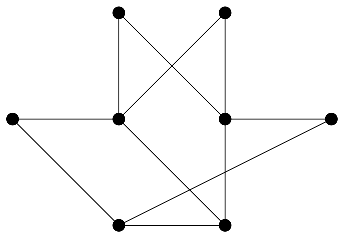
Bevezetés a Számításelméletbe II. — Második gyakorlat

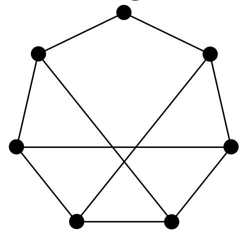
16. kurzus, 2013. február 19.

1. Páros gráf-e az alábbi gráf?

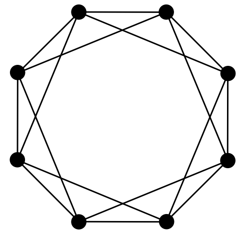


2. Határozd meg az alábbi gráfok kromatikus számát!

a)



b)



3. Egy gráf csúcsai legyenek az 1 és 2007 közé eső természetes számok. Két csúcsot akkor kössünk össze, ha a különbségük legfeljebb 9. Mennyi a gráf kromatikus száma?

4. Határozzuk meg az összes olyan n csúcsú, egyszerű G gráfot, amelyre $\chi(G) = 3$, de bárhogy hagyunk el G-ből egy csúcsot (az éleivel együtt), a kapott G' gráfra $\chi(G') = 2$! (ZH, 2003. május 13.)

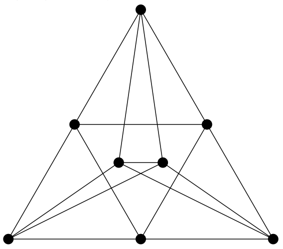
---

5. Egy gráf csúcsai az 1, 2, …, 100 számok, két (különböző) csúcsot összekötünk, ha a szorzatuk osztható 7-tel. Határozzuk meg a gráf kromatikus számát. (ZH, 2010. május 6.)

6. Legyenek a G gráf csúcsai a (8×8-as) sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha egy királynak legalább két lépésre van szüksége ahhoz, hogy az egyikről a másikra jusson. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t! (A sakkban a király egy lépésben bármely mezőről egy azzal akár közös él mentén, akár közös csúcs mentén szomszédos mezőre léphet.) (ZH, 2012. március 12.)

7. Egy 101 csúcsú gráf legrövidebb köre pontosan 100 csúcsot tartalmaz. Igaz-e, hogy a gráf biztosan páros? (ZH, 2010. május 6.)

8. Határozzuk meg az ábrán látható G gráf kromatikus számát, $\chi(G)$-t! (ZH, 2005. március 31.)



9. A G egyszerű gráfban 2007 darab kivételes ponttól eltekintve minden pont foka legföljebb 2006. Bizonyítsd be, hogy $\chi(G) \leq 2007$.

10. A G gráf csúcsai legyenek az $u_1, u_2, \ldots, u_{2003}$, $v_1, v_2 \ldots, v_{2004}$ pontok. G feszített részgráfja az u_i pontokon egy 2003, a v_i pontokon pedig egy 2004 hosszúságú kör. Ezen kívül u_i és v_j össze van kötve egymással minden lehetséges i, j értékpár esetén. Mennyi a G gráf kromatikus száma? (ZH, 2004. március 25.)

11. Tegyük fel, hogy a G gráfot megszíneztük $\chi(G)$ színnel; legyen ezek közül a színek közül kettő a piros és a kék. Bizonyítsd be, hogy ekkor található a gráfban két szomszédos csúcs, amelyek közül az egyik piros, a másik kék.

12. Legyenek a G gráf csúcsai a (8×8-as) sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő mezők vagy él mentén szomszédosak a sakktáblán, vagy legalább az egyikük a sakktábla szélén helyezkedik el. Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t! (A feladatbeli „vagy” nem kizáró, vagyis két csúcs akkor is szomszédos, ha mindkét feltétel teljesül. A sakktábla széle alatt a legfelső és a legalsó sor, valamint a balszélső és a jobbszélső oszlop mezőit értjük.) (ZH, 2012. május 7.)

13. Egy G gráf csúcshalmaza legyen a $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmaz. Egy $x \in V(G)$ csúcs akkor legyen szomszédos az $y \in V(G)$ csúccsal, ha $x \neq y$ és $100 \leq x \cdot y \leq 400$. Határozzuk meg $\chi(G)$ értékét! (ZH, 2003. május 22.)

14. Tegyük fel, hogy G egy 2006 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf. Bizonyítsuk be, hogy a G gráf komplementerének kromatikus számára $\chi(\overline{G}) \geq 400$ áll. (ZH, 2006. március 30.)

15. Egy 2010 csúcsú teljes gráfból kitörlünk két nem csatlakozó élet. Mennyi lesz a kapott gráf kromatikus száma? (ZH, 2010. május 6.)

16. Egy 50 csúcsú teljes gráfból hagyjuk el egy Hamilton-körének éleit. Mennyi a kapott gráf kromatikus száma? (ZH, 2010. május 18.)

17*. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges e élű, egyszerű gráf élei közül elhagyható legföljebb $\frac{e}{2}$ úgy, hogy a maradék gráf páros gráf legyen!