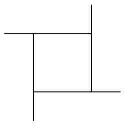
Bevezetés a Számításelméletbe II. — Tizenegyedik gyakorlat

19+21+25. kurzus, 2012. április 20.

1. Határozd meg az alábbi rajzok szimmetriacsoportját úgy, hogy nevet adsz elemeiknek és felírod a műveleti táblát (egy táblázatban minden elempárra megmondod, hogy mi a szorzatuk)!

a) 

b) 

2. Határozd meg a D_8 diédercsoportban az alábbi elemek rendjét!

a) f_{45} b) $f_{90} \cdot t_1$

c) f_{90} d) f_{135}

3. A G csoport $g \in G$ elemére $o(g) = 10$. Mennyi $o(g^3)$ értéke?

---

4. Egy szabályos ötszög csúcsait számozzuk meg az óramutató járásával ellenkező irányban 1-től 5-ig. Jelölje t_i az i-edik csúcson, és a vele szemközti oldal felezőpontján átmenő tengelyre való tükrözést. Jelölje f_{72}, f_{144}, f_{216} és f_{288} az ötszög középpontja körüli, megfelelő szögű forgatást. Végül jelölje I az identitást. Végezd el a szabályos ötszög szimmetriacsoportjában az alábbi műveleteket!

a) $f_{144} \cdot t_1$ b) $f_{72} \cdot t_2 \cdot f_{72} \cdot t_2$ c) $(t_1 \cdot t_3)^{-1}$

5. Az alábbi, korábbi feladatokban szerepelt csoportokról döntsük el, hogy ciklikusak-e!

a) Kilencedik gyakorlat, **2.** feladat, c) rész b) Tizenegyedik gyakorlat, **1.** feladat, a) rész

c) Tizenegyedik gyakorlat, **2.** feladat, b) rész d) Kilencedik gyakorlat, **11.** feladat, a) rész

6. Egy csoport rendje 81 és van olyan eleme, aminek a 27. hatványa nem az egységelem. Bizonyítsd be, hogy a csoport Abel-csoport!

7. Csoportot alkotnak-e a szokásos szorzásra a valós és tiszta képzetes komplex számok a 0 nélkül, azaz csoport-e $(X, \cdot)$, ahol $X = \{a \in \mathbb{R} : a \neq 0\} \cup \{ai : 0 \neq a \in \mathbb{R}\}$, ill. $\cdot$ a komplex számokon értelmezett szokásos szorzást jelöli? (ZH, 2006. május 4.)

8. Legyen $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ és jelölje $*$ a H elemein végzett „modulo 7 szorzás" műveletét (vagyis $a * b$ egyenlő az $a \cdot b$ szorzat 7-es maradékával).

a) Mutasd meg, hogy H csoportot alkot a $*$ művelettel!

b) Határozd meg $o(4)$-et, vagyis a 4 elem rendjét a csoportban!

c) Döntsd el, hogy a csoport ciklikus-e!

9. A valós számsorozatok halmaza csoportot alkot a számsorozatok összeadására, mint műveletre nézve (ezt könnyű ellenőrizni). Döntsd el, hogy az alábbi részhalmazok részcsoportot alkotnak-e ebben a csoportban?

a) a konvergens számsorozatok halmaza; b) a divergens számsorozatok halmaza;

c) a korlátos számsorozatok halmaza; d) a monoton növő számsorozatok halmaza.

10. a) A G véges Abel-csoport összes elemét összeszorozzuk valamilyen sorrendben. Bizonyítsd be, hogy eredményül G-nek olyan elemét kapjuk, amelynek az inverze önmaga!

b) Igazold, hogy egy páratlan rendű Abel-csoportban az összes elem szorzata az egységelem.

---

11. Tegyük fel, hogy G egy 49-elemű csoport és H_1, illetve H_2 a G valódi részcsoportjai. Bizonyítsuk be, hogy $|H_1| = |H_2|$ teljesül! (Egy G csoport valódi részcsoportja egy olyan $H \leq G$ részcsoport, ami az egységelem mellett még legalább egy másik elemet is tartalmaz és $H \neq G$.) (ZH, 2006. május 4.)

12. Van-e olyan 20 elemű csoport, amelyben

a) van 5 rendű elem, de nincs 20 rendű elem;

b) van 20 rendű elem, de nincs 5 rendű elem?

(ZH, 2003. április 30.)

13. Egy G csoport g elemére teljesül, hogy $o(g) = o(g^k)$ (ahol $o(g)$ a g elem rendjét jelöli és k pozitív egész). Mutassuk meg, hogy $o(g)$ és k relatív prímek! (ZH, 2005. május 5.)

14. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább 2 elemű) véges csoportban van olyan elem, amelynek a rendje prímszám! (ZH, 2003. május 22.)