Bevezetés a Számításelméletbe II. — Hetedik gyakorlat
19+21+25. kurzus, 2012. március 12.

1. Adjuk meg az összes olyan pozitív egész számot, ami osztható 6-tal és pontosan 9 osztója van. (ZH, 2010. április 22.)

2. Milyen maradékot ad
a) 100^{100} 11-gyel osztva;
b) $65^{63^{61}}$ 66-tal osztva;
c) 41^{41} 35-tel osztva?

3. Legyenek A, B és C diszjunkt, r elemű halmazok (ahol $r \geq 1$ egész). Készítsünk egy G gráfot úgy, hogy a csúcsainak halmaza legyen $A \cup B \cup C$ és két csúcsot akkor kössünk össze éllel, ha A, B és C közül nem ugyanabba a halmazba esnek. (A G gráf tehát elképzelhető úgy is, mint ha három, „egymás mellé rajzolt” r csúcsú teljes gráfból álló gráf komplementerét vennénk.) Határozzuk meg azt a maximális k számot, amelyre a G gráf k-szorosan összefüggő! (ZH, 2003. április 30.)

---

4. Mi az utolsó két számjegye az alábbi számoknak?
a) 2001^{2007}
b) $99^{77^{55}}$
c) 51^{151}

5. Legyen A és B a G gráf csúcsai halmazának két diszjunkt, egyenként legalább k elemű részhalmaza. Tegyük fel, hogy bárhogyan hagyunk el G-ből k-nál kevesebb pontot, a maradék gráfban van olyan út, amely A és B-beli pontokat köt össze. Bizonyítsd be, hogy ekkor létezik G-ben k darab (teljes egészében) pontdiszjunkt út úgy, hogy mindegyik A és B-beli pontokat köt össze!

6. Legyen n páratlan egész szám, amely nem osztható egyetlen prímszám négyzetével sem. Bizonyítsuk be, hogy n pozitív osztóinak átlaga egész szám! (ZH, 2003. április 30.)

7. Bizonyítsuk be, hogy minden háromszorosan összefüggő gráfban van páros hosszúságú kör! (ZH, 2003. június 5.)

8. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c, d, e és f egész számokra

$$(a+b, c+d, e+f) | ace + bdf$$

teljesül (ahol a gömbölyű zárójel a legnagyobb közös osztót jelöli).

9. Bizonyítsd be, hogy egy k-szorosan élösszefüggő, n pontú gráfnak legalább $\frac{kn}{2}$ éle van!

10. Bizonyítsd be, hogy egy 3-reguláris gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha k-szorosan pontösszefüggő!

11. Legyen $k \leq n-1$. Bizonyítsd be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n+k-2}{2}$, akkor a gráf k-szorosan összefüggő!

12. Legyen G reguláris páros gráf, amelyről tudjuk, hogy összefüggő és legalább három csúcsa van. Mutassuk meg, hogy ekkor G 2-szeresen is összefüggő. (ZH, 2002. május 16.)

13. a) Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai „kétállásúak”: ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárakkal játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a k-adik feleség minden k-adik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések? (*Ne* mindenféle trükkös körülírásait add meg a cellák sorszámainak, hanem sorold fel az összeset!)

b) A sah következő születésnapján a feleségek megint rosszalkodnak. Most az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján kettőt fordít, stb., a k-adik feleség minden k-adik ajtó zárján k-t fordít, egészen a 100. feleségig. Most milyen sorszámú cellák lakói szabadulnak?