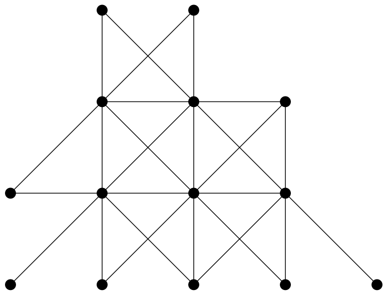
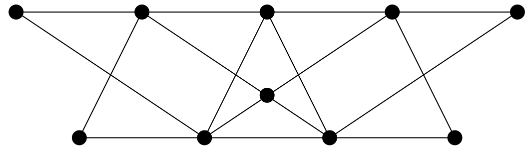
Bevezetés a Számításelméletbe II. — Negyedik gyakorlat

19+21+25. kurzus, 2012. február 27.

1. Határozd meg az alábbi gráfban $\nu(G)$-t, a független élek maximális számát! (ZH, 2003. március 27.)



2. Jelölje G az alábbi ábrán látható gráfot. Határozzuk meg $\nu(G)$, $\varrho(G)$, $\tau(G)$ és $\alpha(G)$ értékét!



3. Bizonyítsd be, hogy minden reguláris páros gráfban van teljes párosítás! (Egy gráf *reguláris*, ha minden pont foka ugyananny.)

---

4. Egy vállalatnál hét pályázó jelentkezett hat üres munkahelyre (számozzuk ezeket 1-től 6-ig), egy ember több helyre is: Aladár az 1-es; Béla az 1, 3-as; Csaba a 2, 4, 6-os; Dani a 2, 5-ös; Erzsi a 3, 4, 5, 6-os; Feri az 1, 3-as; Géza a 3-as munkahelyre.

a) Döntsd el, hogy betölthető-e mind a hat munkahely (egy ember csak egy helyre kerülhet)! Ha nem, akkor hány tölthető be?

b) Változtat-e valamin, ha Feri meggondolja magát és a 2-es munkahelyet is hajlandó elfogadni?

5. Egy iskolában a diákok különféle bizottságokat választottak (egy ember többnek is tagja lehet) és most minden bizottság a saját tagjai közül egy-egy elnököt szeretne kinevezni. Bármely bizottság bármely tagja alkalmas lenne elnöknek, de nem akarják, hogy valaki egyszerre több bizottságnak is elnöke legyen. Mikor valósítható ez meg? (Keress szükséges és elégséges feltételt!)

6. Legyen a H gráf csúcshalmaza $V = \{1, 2, \ldots, 2001\}$, és az $i, j \in V$ csúcsok között pontosan akkor menjen él, ha az $i + j$ szám 3-mal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg a következő értékeket: $\nu(H)$, $\varrho(H)$, $\tau(H)$, $\alpha(H)$. (ZH, 2001. március 29.)

7. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt. El kellene osztani közöttük $2n$ különböző fajta csokit úgy, hogy mindenki egyet-egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokik közül. Továbbá minden emberre teljesül, hogy ha ő valamelyik fajta csokit nem szereti, akkor a házastársa ezt a fajtát biztosan szeretni fogja. Bizonyítsd be, hogy a csokik szétoszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret! (ZH, 1999. május 19.)

8. Jelölje G_8 azt a Mycielski-konstrukció által készített gráfot, amelyre $\chi(G_8) = 8$. Ekkor G_8-nak 191 csúcsa van. Határozzuk meg $\nu(G_8)$, vagyis a G_8-beli független élek maximális számának értékét!

9. Bizonyítsd be, hogy minden egyszerű G gráfban $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ teljesül.

10. Egy egyszerű páros gráf mindkét osztályában pontosan 5 csúcs van, minden csúcs foka legalább 2. Mutassuk meg, hogy ebből nem következik, hogy a gráfban van teljes párosítás. (ZH, 2010. május 6.)

11. Egy szigeten n törzs él, földműveléssel és vadászattal foglalkoznak. Belvillongások miatt a Földművelésügyi minisztérium felosztja a szigetet n egyenlő parcellára, hogy minden törzs egyet-egyet kapjon. Ugyanezt teszi a Vadászati Minisztérium is, nem tudva a már létező felosztásról. Így minden törzs kap egy parcellát földművelés, egyet pedig vadászat céljából. Bizonyítsd be, hogy a parcellák kioszthatók úgy, hogy minden törzs földművelési és vadászati parcellájának legyen közös része!

12. A G gráf csúcshalmaza legyen $V(G) = \{1, 2, \ldots, 60\}$. Az $x, y \in V(G)$ csúcsok akkor legyenek szomszédosak, ha $x \neq y$ és $x \cdot y$ osztható 6-tal. Határozzuk meg $\nu(G)$ értékét! (ZH, 2009. március 23.)

	él	pont
maximális független	ν	α
minimális lefogó	ϱ	τ