

## Bevezetés a számításelméletbe II.

2012. FEBRUÁR 20.

3. gyakorlat: Élszínezés, perfekt gráfok

1. Egy körmérkőzéses bajnokságot hány forduló alatt tudunk lejátszani, ha
  - (a) páratlan számú játékos
  - (b) páros számú játékos van a bajnokságban?
2. Legyen  $G$  100-reguláris egyszerű gráf 2001 ponton. Határozzuk meg  $\chi_e(G)$  értékét!
3. A  $G$  egyszerű gráfban a legnagyobb fokszám legyen  $\Delta$ . Készítsük el a  $G'$  gráfot a következőképpen:  $G'$ -be vegyük fel  $G$  minden csúcsát és élét, továbbá  $G$  minden  $v$  csúcsa esetén vegyünk fel egy új  $v'$  csúcsot, amelyet kössünk össze  $v$ -vel, végül  $G$  minden  $\{u, v\}$  élére  $G'$ -ben a megfelelő  $u'$  és  $v'$  csúcsokat is kössük össze. Mutassuk meg, hogy a kapott  $G'$  gráf élkromatikus száma  $\chi_e(G') = \Delta + 1$ .
4. (ZH 2010) Egy gráf csúcsai a 100-nál nem nagyobb pozitív egészek, két csúcsot összekötünk, ha az összegük osztható hárommal. Perfekt-e a gráf?
5. A  $G$  gráf csúcsai legyenek a  $8 \times 8$ -as sakktábla mezői, és két mező akkor legyen szomszédos  $G$ -ben, ha egy lóugrásnyira vannak egymástól.
  - (a) Határozzuk meg  $G$  kromatikus számát,  $\chi(G)$ -t!
  - (b) Bizonyítsuk be, hogy  $G$  perfekt!
6. Legyenek egy  $G$  gráf csúcsai azok a  $10^{100}$ -nál nem nagyobb pozitív egész számok, amelyeknek van 20-nál kisebb prímosztója.  $G$  két csúcsa pontosan akkor alkot élet, ha a megfelelő pozitív egészek relatív prímek. Állapítsuk meg  $G$  kromatikus számának értékét! Igaz-e hogy perfekt?
7. Egy szállodába 20 vendég érkezik. Az  $i$ -edik vendég az  $i$ -edik napon érkezik és a  $2i$ -edik napon távozik. A hotelt elhagyó vendég szobáját csak a következő napon lehet kiadni. Minimum hány szoba kell a vendégek elhelyezésére?
8. Adott egy  $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan  $k$  darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható  $n$  darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!