Bevezetés a Számításelméletbe I. — Nyolcadik gyakorlat

25. kurzus, 2013. október 22.

**1.** Határozd meg az alábbi mátrixok inverzét!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ (ZH, 2006. október 26.)

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

**2.** a) Számold ki az alábbi $A$ és $B$ mátrixok 2008-adik hatványát! (ZH, 2008. október 21., 2008. december 2.)
b) A kapott eredményekből mire lehet következtetni a két mátrix determinánsára vonatkozóan?

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \\ 8 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

**3.** a) Bizonyítsd be, hogy $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$! (Feltéve, hogy $A$ és $B$ invertálható.)
b) Bizonyítsd be, hogy $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$! Segítség: előadáson szerepelt, hogy $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

**4.** Egy $n \times n$-es $A$ mátrix minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével. Mi lesz az így kapott $n^2$ darab szorzat összege?

**5.** Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges $A$ négyzetes mátrixra! (0-val jelöltük a csupa nulla mátrixot.)
a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$, akkor $\det A = 0$.
b) Ha $\det A = 0$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$. (ZH, 2003. január 9.)

**6.** a) Legyen $A$ olyan $n \times n$-es mátrix, amire $\det A \neq 0$, $B$ pedig tetszőleges $n \times n$-es mátrix. Igaz-e, hogy létezik olyan $n \times n$-es $X$ mátrix, amire $AX = B$? (ZH, 2009. december 1.)
b) Az $A$ és $B$ $n \times n$-es mátrixokról tudjuk, hogy $\det A \neq 0$, valamint hogy $A \cdot B = \underline{\underline{0}}$. Határozd meg a $B$ mátrixot! (Itt $\underline{\underline{0}}$ a csupa nulla mátrixot jelöli.)

**7.** Határozd meg az összes olyan $2 \times 2$-es $X$ mátrixot, amelynek minden eleme racionális szám és amelyre $X^{2011} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ teljesül.

**8.** Tegyük fel, hogy az $n \times n$-es $A$, $B$, $C$ mátrixokra az $A \cdot X = B$ egyenlet megoldható, de az $A \cdot X = C$ egyenlet nem. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $n \times n$-es $D$ mátrix, amelyre a $B \cdot X = D$ nem megoldható! (ZH, 2011. december 5.)

**9.** Legyen $A$ olyan $n \times n$-es mátrix, melyre $A = A^T$ és $A^2$ főátlójában csak nullák állnak. Igazoljuk, hogy $A$ a nulla mátrix (minden eleme 0). (ZH, 1999. december 16.)

**10.** Tegyük fel, hogy az $A$, $B$, $C$ $n \times n$-es mátrixok mindegyikének van inverze. Igaz-e, hogy ekkor az $ABC$ szorzatmátrix is invertálható? Igaz-e az állítás megfordítása, vagyis abból, hogy $ABC$ invertálható, következik-e, hogy $A$, $B$ és $C$ mindegyike külön-külön invertálható?

**11.** Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg az $A^{-1}B^{-1}$ szorzatot!

**12.** Határozd meg az alábbi mátrixok inverzét!

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ZH, 2005. november 22.)

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$