Bevezetés a Számításelméletbe I. — Hetedik gyakorlat

25. kurzus, 2013. október 15.

1. Legyen $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Döntsd el, hogy az alábbi mátrixmûveletek elvégezhetõk-e és ha igen, add meg az eredményt!

a) $2A + 3B$ b) $A \cdot B$ c) $B \cdot A$ d) $A \cdot B + 2B$ e) $B \cdot B^T$

2. Írd fel az $A(1; 2; 12)$, $B(3; 1; 3)$ és $C(2; -1; -5)$ pontokon átmenõ sík egyenletét!

---

3. Döntsük el, hogy a térben egy síkba esnek-e az $A(2; -1; 1)$, $B(4; -2; -1)$, $C(-6; -11; 2)$ és a $D(10; 15; 3)$ pontok. (ZH, 2008. december 2.)

4. Tudjuk, hogy egy vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a $\langle \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{99} + \underline{v}_{100}, \underline{v}_{100} + \underline{v}_1 \rangle$ altér? (ZH, 2007. október 24.)

5. Legyen $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \\ 19 \end{pmatrix}$. Oldd meg az $A \cdot X = B$ „mátrixegyenletet”, vagyis határozd meg az összes olyan X mátrixot, amelyre $A \cdot X = B$ teljesül.

6. Számold ki az alábbi mátrixokat! (A^n az az n tényezõs szorzat, amelynek minden tagja A.)

a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2011}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2011}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2011}$

7. Bizonyítsuk be, hogy egy 99 dimenziós vektortér két, 50 dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különbözõ közös eleme! (ZH, 2002. október 31.)

---

8. Döntsd el, hogy az alábbi egyenlõségek igazak-e bármely $n \times n$-es A és B mátrixokra! (E jelöli az $n \times n$-es egységmátrixot.)

a) $AB + B = (A + E)B$ b) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ c) $(A + E)(A - E) = A^2 - E$

9. a) Számold ki az alábbi A és B mátrixok 2008-adik hatványát! (ZH, 2008. október 21., 2008. december 2.)
b) A kapott eredményekbõl mire lehet következtetni a két mátrix determinánsára vonatkozóan?

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -3 \\ 8 & 16 & -7 \end{pmatrix}$$

10. Határozzuk meg az összes olyan Y mátrixot, amelyre $Y \cdot A = B$ teljesül, ahol az A és B mátrixok az alábbiak:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 & 11 \\ -3 & -7 & 12 & -11 \\ 5 & 7 & -18 & 22 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

(ZH, 2008. október 21.)

11. Legyen egy paralelepipedon egyik csúcsa az origó, az ezzel szomszédos három csúcsa pedig $A(0; 1; -2)$, $B(1; 1; 5)$, illetve $C(1; 3; -1)$. Határozzuk meg a paralelepipedon térfogatát! (ZH, 2010. október 21.)

12. Legyen A olyan $n \times n$-es mátrix, melyre $A = A^T$ és A^2 fõátlójában csak nullák állnak. Igazoljuk, hogy A a nulla mátrix (minden eleme 0). (ZH, 1999. december 16.)

13. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszõleges A négyzetes mátrixra! (0-val jelöltük a csupa nulla mátrixot.)

a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$, akkor $\det A = 0$.
b) Ha $\det A = 0$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$. (ZH, 2003. január 9.)

14. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek a V (tetszõleges) vektortérben. Legyen továbbá $\underline{u} \in V$, $\underline{u} \neq \underline{0}$ a nullvektortól különbözõ, tetszõleges vektor. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $1 \leq i \leq n$, amelyre a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{u}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok szintén lineárisan függetlenek! (ZH, 2006. november 9.)