Bevezetés a Számításelméletbe I. — Második gyakorlat

25. kurzus, 2013. szeptember 17.

1. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Értelmezzük V-n a $\oplus$ vektorösszeadást és a vektorok valós számmal való $\odot$ szorzását a következőképpen: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ és $\lambda \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix}$. Döntsd el, hogy a V halmaz a most definiált $\oplus$ és $\odot$ művelettel vektorteret alkot-e! (ZH, 2010. október 21.)

2. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(3;1;-1)$ ponton és nincs közös pontja az alábbi egyenletrendszerekkel megadott e_1 és e_2 egyenesek egyikével sem. (ZH, 2011. október 20.)

$$e_1 : \quad \frac{x}{3} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{2}$$

$$e_2 : \quad \frac{x-7}{2} = \frac{y+3}{-5} = z - 4$$

---

3. Az $A(2;5;1)$, $B(5;7;4)$, $C(6;4;2)$ és $D(9;7;5)$ pontokra adjuk meg az $ABCD$ tetraéder ABC lapjához tartozó magasságvonalának egyenletrendszerét! (Egy tetraéder egy lapjához tartozó magasságvonala alatt a lap síkjára merőleges és a lapra nem illeszkedő csúcson áthaladó egyenest értjük.) (ZH, 2011. december 5.)

4. Legyen $V = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza. Értelmezzük V-n a $\oplus$ vektorösszeadást és a vektorok valós számmal való $\odot$ szorzását a következőképpen:

$$\begin{aligned} \underline{u} \oplus \underline{v} &= u + v + 1 \\ \lambda \odot \underline{v} &= \lambda \cdot v + \lambda - 1 \end{aligned}$$

Döntsd el, hogy a V halmaz a most definiált $\oplus$ és $\odot$ művelettel vektorteret alkot-e! (ZH, 2006. november 9.)

5. Vektorteret alkotnak-e az alábbi halmazok?

a) Valós együtthatós polinomok a szokásos összeadással és számmal való szorzással

b) Pontosan n-edfokú valós együtthatós polinomok a szokásos összeadással és számmal való szorzással

c) Legalább n-edfokú valós együtthatós polinomok a szokásos összeadással és számmal való szorzással

d) Legfeljebb n-edfokú valós együtthatós polinomok a szokásos összeadással és számmal való szorzással

6. Határozzuk meg annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a P(1;3;4) és a Q(3;6;10) pontokon és párhuzamos az $\frac{x-9}{3} = y + 4 = \frac{z}{5}$ egyenletrendszerű egyenessel! (ZH, 2012. december 3.)

7. Legyen V a pozitív valós számok halmaza. Minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén legyen $\underline{u} \oplus \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{v}$ (vagyis $\oplus$ a pozitív valós számok szorzását jelöli!) és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, valamint minden $\underline{v} \in V$ esetén legyen $\lambda \odot \underline{v} = \underline{v}^{\lambda}$. Döntsd el, hogy a V halmaz a most definiált $\oplus$ és $\odot$ művelettel vektorteret alkot-e!

8. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges V vektortérben minden $\underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár esetén igazak az alábbi állítások!

a) $\lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$

b) $0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$

c) $(-1) \cdot \underline{v} = -\underline{v}$

d) Ha $\lambda \cdot \underline{v} = \underline{0}$, akkor $\lambda = 0$ vagy $\underline{v} = \underline{0}$.

9*. Tekintsük az alábbi három egyenlettel adott síkokat!

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 6 \\ x - 3y + 2z &= 5 \\ 4x - 3y + pz &= q \end{aligned}$$

a) Add meg a p és q paraméterek értékét úgy, hogy az alábbi egyenletű síkok egy egyenesre illeszkedjenek!

b) Most úgy válaszd meg p és q értékét, hogy a síkoknak ne legyen közös pontjuk! (Azaz ne legyen olyan pont, amelyik mindhárom síkra illeszkedik.)

c) Az eddigieken kívül milyen helyzetben lehet egymáshoz képest három sík a térben? Ezek közül melyek valósulhatnak meg p és q alkalmas megválasztásával?