Feladat

Oldd meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán és add meg az eredményt algebrai alakban! (ZH, 2008. december 2.)

$$z^2 + (1+i)\overline{z} + 4i = 0$$

Megoldás

Mivel konjugált van a feladatban, és nem nagyon látjuk, mi mást tehetnénk, írjuk fel a komplex számokat algebrai alakban:

$$z = x + yi \qquad , \qquad \overline{z} = x - yi \qquad , \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

Beírva az egyenletbe:

$$(x+yi)^2 + (1+i)(x-yi) + 4i = 0$$

Felbontva a zárójeleket:

$$x^2 - y^2 + 2xyi + x + y + xi - yi + 4i = 0$$

Átrendezve:

$$(x^2 - y^2 + x + y) + (2xy + x - y + 4)i = 0$$

Egy komplex szám akkor és csak akkor 0, ha a valós és a képzetes része is 0:

$$x^2 - y^2 + x + y = 0 \qquad (1)$$

$$2xy + x - y + 4 = 0 \qquad (2)$$

(1)-ben vegyük észe a középiskolából ismert $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ azonosságot:

$$(x+y)(x-y) + x + y = 0$$

Azaz

$$(x+y)(x-y+1) = 0$$

Egy szorzat akkor és csak akkor 0, ha valamelyik tényezője 0, így $y = -x$ vagy $y = x+1$ teljesül.

1. eset

Ebben az esetben $y = -x$

Beírva (2)-be:

$$-2x^2 + x + x + 4 = 0$$

Leosztva (-2)-vel:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Megoldva a másodfokú egyenletet a megoldások: $x_1 = 2$ és $x_2 = -1$.
A megfelelő y-ok: $y_1 = -2$ és $y_2 = 1$
Azaz az ebben az esetben kapott megoldások: $z_1 = 2 - 2i$ és $z_2 = -1 + i$.

2. eset

Ebben az esetben $y = x + 1$

Beírva (2)-be:

$$2x(x+1) + x - (x+1) + 4 = 0$$

Felbontva a zárójeleket és összevonva:

$$2x^2 + 2x + 3 = 0$$

Amikor megpróbáljuk megoldani ezt az egyenletet, az jön ki, hogy a diszkirimináns $D = -20$. Mivel x *valós* szám, és a diszkirimáns negatív, ennek az egyenletnek nincs megoldása. Vagyis az eredeti egyenletnek kizárólag az előző esetből származó két megoldása van.