Bevezetés a Számításelméletbe I. — Nyolcadik gyakorlat

25. kurzus, 2012. november 9.

1. Az $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ függvény a tér minden (x,y,z) vektorához a sík $(x-y+z,x-y+z)$ vektorát rendeli.

a) Mutasd meg, hogy $\mathcal{A}$ lineáris leképezés!

b) Legyen $B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ a tér, $C=\{(1,0),(0,1)\}$ pedig a sík „szokásos" bázisa. Írd fel $\mathcal{A}$ mátrixát a B és C bázisok szerint!

c) Legyen $B'=\{(2,0,-1),(-1,2,0),(0,-1,2)\}$ a tér, $C'=\{(1,2),(3,4)\}$ pedig a sík (egy-egy másik) bázisa. Írd fel $\mathcal{A}$ mátrixát a B' és C' bázisok szerint is!

2. Legyen adott a 2 dimenziós V vektortéren az $\mathcal{A}:V\to V$ lineáris transzformáció és a $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2\}$ bázis V-ben. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható mátrix. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}(\underline{b}_1)=\underline{b}_2$. (ZH, 2010. november 25.)

$$\begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

---

3. Döntsd el, hogy az alábbi $\mathbb{R}^3$-ről $\mathbb{R}^2$-be (vagyis a szokásos térről a szokásos síkba) menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, írd fel a mátrixukat a „szokásos" bázisok (azaz $\mathbb{R}^3$-ben az $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\mathbb{R}^2$-ben az $\{(1,0),(0,1)\}$) szerint!

a) $\mathcal{A}:(x,y,z)\mapsto(x,z)$ b) $\mathcal{B}:(x,y,z)\mapsto(x\cdot y,x\cdot z)$ c) $\mathcal{C}:(x,y,z)\mapsto(x+y,x+z)$

4. Írd fel az előző feladat lineáris leképezéseinek mátrixát a B' és C' bázisok szerint, ahol $B'=\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ és $C=\{(1,1),(1,0)\}$!

5. Legyen $\mathcal{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ lineáris leképezés. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ mátrixa a B és C bázisok szerint az alábbi A mátrix, ahol $B=\{(1;1;1),(0;1;1),(0;0;1)\}$ és $C=\{(2;1),(2;-1)\}$. Mit rendel $\mathcal{A}$ a $(3;2;1)$ vektorhoz? (ZH, 2011. november 24.)

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Legyen $\mathcal{A}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ lineáris leképezés. Tegyük fel, hogy $\mathcal{A}$ mátrixa a B és C bázisok szerint az alábbi A mátrix, ahol $B=\{(2;3),(2;5)\}$ és $C=\{\underline{c}_1,\underline{c}_2,\underline{c}_3\}$, ahol $\underline{c}_1=(1;2;1)$ (de $\underline{c}_2$ és $\underline{c}_3$ nem ismert.) Határozzuk meg a $\underline{c}_3$ vektort, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}$ a $(6;11)$ vektorhoz az $(1;6;7)$ vektort rendeli!(ZH, 2011. december 5.)

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Legyen $V=\mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere. Döntsd el, hogy az alábbi V-ről V-be menő hozzárendelések lineáris leképezések-e Ha igen, írd fel a leképezés mátrixát a „szokásos" $\{(1,0),(0,1)\}$ bázisban! Minden $\underline{v}$ vektornak feleltessük meg

a) az x-tengelyre vett tükörképét;

b) azt az x-tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátái közül a nagyobb;

c) azt az x-tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátáinak összege;

d) az x tengelyre vett tükörképének origó körüli $+60°$-os elforgatottját.

8. Legyen V a térvektorok szokásos vektortere, $\mathcal{A}:V\to V$ lineáris transzformáció és $B=\{\underline{b}_1,\underline{b}_2,\underline{b}_3\}$ bázis V-ben. Tegyük fel, hogy $\underline{b}_1=(1;2;3)$, $\underline{b}_2=(2;3;4)$ és $\mathcal{A}$ mátrixa a B bázis szerint a jobbra látható A mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b}_3$ vektort, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}(\underline{b}_1+\underline{b}_2+\underline{b}_3)=(3;6;5)$! (ZH, 2010. december 6.)

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

9. Jelölje U a legföljebb másodfokú, valós együtthatós polinomok (vagyis ax^2+bx+c alakú kifejezések, ahol $a,b,c\in\mathbb{R}$) vektorterét (a polinomok szokásos összeadás és skalárral szorzás műveletével). Az $\mathcal{A}:U\mapsto\mathbb{R}^2$ lineáris leképezés x^2+x+1-hez $(3;3)$-at, $2x+3$-hoz $(4;5)$-öt és $2x+2$-höz $(2;6)$-ot rendel.

a) Mit rendel $\mathcal{A}$ x^2+2x+2-höz?

b) Írd fel $\mathcal{A}$ mátrixát a $B=\{x^2,x,1\}$, $C=\{(1;0),(0;1)\}$ bázisok szerint!

c) Mi $\mathcal{A}$ „képlete" (vagyis mit rendel ax^2+bx+c-hez)?

---

10. Legyen $\mathcal{B}:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció. Az $(1;1)$ vektor $\mathcal{B}$ szerinti képe a $(4;3)$ vektor, az $(1;0)$ képe pedig a $(-1;2)$ vektor. Adjuk meg $\mathcal{B}$ mátrixát a „szokásos" bázisban! (ZH, 2009. december 1.)

11. Legyen $V=\mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere és legyen $\mathcal{A}:V\to V$ egy lineáris transzformáció. Az $\mathcal{A}$ mátrixa a $\underline{b}_1=(1,0)$ és $\underline{b}_2=(1,1)$ vektorokból álló bázisban felírva a jobbra látható mátrix. Tudjuk továbbá, hogy valamely y értékre $\mathcal{A}$ az $(y,3)$ vektorhoz önmagát rendeli. Határozzuk meg x értékét! (ZH, 2006. december 7.)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$$

12. Legyen U a legfeljebb 100-adfokú, valós együtthatós polinomok vektortere. Döntsd el, hogy az alábbi U-ról U-ba menő hozzárendelések lineáris transzformációk-e? Ha igen, írd fel a leképezés mátrixát az $\{x^{100}, x^{99}, \dots, x, 1\}$ bázis szerint! Minden $f \in U$ polinomnak feleltessük meg

a) deriváltját; b) az $x^{100}+1$ polinomot; c) az $a_0 \cdot x$ polinomot, ahol a_0 az f konstans tagja.

13. Előfordulhat-e, hogy egy $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ lineáris transzformáció mátrixát két különböző bázisban felírva az alábbi eredményeket kapom?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

14. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképezés V_1-ről V_2-be, $\underline{v}_i \in V_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

a) Ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer V_2-ben.

b) Ha $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ lineárisan függetlenek, akkor $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ is lineárisan függetlenek.

c) Ha $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \dots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ lineárisan függetlenek, akkor $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ is lineárisan függetlenek.