Bevezetés a Számításelméletbe I. — Ötödik gyakorlat
25. kurzus, 2012. október 2.

1. Számold ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 0&0&0&0&6\\ 7&0&0&7&0\\ 8&8&0&0&0\\ 0&7&7&0&0\\ 0&0&9&9&0 \end{vmatrix}$$

2. Számold ki az alábbi determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 4&4&4&4\\ 3&6&9&12\\ 2&6&12&20\\ 1&4&10&20 \end{vmatrix}$$

---

3. Számold ki *csak a definíció felhasználásával* az alábbi determinánsok értékét!

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 0&0&0&7&2\\ 0&0&0&9&3\\ 0&0&0&5&8\\ 7&2&9&8&6\\ 3&1&4&5&5 \end{vmatrix} \quad \text{b)}\begin{vmatrix} 0&0&0&0&1\\ 0&1&0&0&4\\ 0&3&0&1&7\\ 1&5&0&2&9\\ 6&8&1&4&7 \end{vmatrix}$$

4. Számold ki az alábbi determinánsokat!

$$\text{a)}\begin{vmatrix} 2&-2&4&6\\ 1&1&0&7\\ 2&0&4&8\\ 4&1&6&20 \end{vmatrix} \qquad \text{b)}\begin{vmatrix} 1&2&3&4&5&6\\ 1&3&5&7&9&11\\ 1&4&7&10&13&16\\ 1&5&9&13&17&21\\ 1&6&11&16&21&26\\ 1&7&13&19&25&31 \end{vmatrix}$$

5. Egy $n\times n$-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem a_{ij}. Határozd meg A determinánsát, ha

a) $a_{ij}=\begin{cases} i, & \text{ha } i=j,\\ 1, & \text{ha } i\neq j.\end{cases}$ b) $a_{ij}=\begin{cases} 0, & \text{ha } i=j,\\ 1, & \text{ha } i\neq j.\end{cases}$ (ZH, 2009. október 20.)

6. Az alábbi determinánsban a, b, c és d valós számokat jelölnek. Adjuk meg a determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 1&a&b&c+d\\ 1&b&c&a+d\\ 1&c&d&a+b\\ 1&d&a&b+c \end{vmatrix}$$

(ZH, 2003. november 6.)

7. Egy $n\times n$-es mátrix minden eleme ±1 Bizonyítsd be, hogy a determinánsa osztható 2^{n-1}-nel!

---

8. Mennyi az $1,2,\ldots,n$ elemek alábbi permutációinak inverziószáma?

a) 1,3,5,7,9,8,6,4,2 $(n=9)$ b) 100,101,98,99,96,97,...,2,3,1 $(n=101)$

9. A jobbra látható determináns *definíció szerinti* kiszámításakor

a) hány nemnulla szorzat keletkezik;

b) milyen előjelet kap az a szorzat, amelynek az egyik tényezője 23?

(ZH, 2010. december 15.)

$$\begin{vmatrix} 0&11&12&13&14\\ 0&15&0&0&21\\ 0&22&23&0&0\\ 0&0&24&0&25\\ 31&32&33&34&35 \end{vmatrix}$$

10. Egy $n\times n$-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem a_{ij}. Határozd meg A determinánsát, ha

a) $a_{ij}=i\cdot j$ b) $a_{i,j}=\min\{i,j\}$ c) $a_{ij}=i^2j^2+1$ (ZH, 2002. december 10.)

11. A 101×101-es A mátrixban az i-edik sor és a j-edik oszlop kereszteződésében álló elem

$$a_{ij}=\begin{cases} 3^{2004}\text{-nek a } (2i+j)\text{-edik számjegye,} & \text{ha } i\cdot j \text{ páros,}\\ 0, & \text{ha } i\cdot j \text{ páratlan.}\end{cases}$$

Határozzuk meg A determinánsát! (ZH, 2004. november 4.)

12. Egy $n\times n$-es mátrix minden sorában az elemek összege 2008. Bizonyítsuk be, hogy ha a mátrix egyik oszlopának minden elemét kicseréljük 1-esre, akkor az így kapott új mátrix determinánsa 2008-adrésze az eredeti mátrix determinánsának. (ZH, 2008. október 21.)

13. Bizonyítsd be, hogy

$$\begin{vmatrix} 1849&1444&1896&1222\\ 1490&1703&1790&1526\\ 1342&1566&1541&1514\\ 1242&1552&1382&1825 \end{vmatrix}\neq 0$$

14. Tudjuk, hogy egy vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a $\langle \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{99} + \underline{v}_{100}, \underline{v}_{100} + \underline{v}_1 \rangle$ altér? (ZH, 2007. október 24.)

15. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok lineárisan függetlenek a V (tetszõleges) vektortérben. Legyen továbbá $\underline{u} \in V$, $\underline{u} \neq \underline{0}$ a nullvektortól különbözõ, tetszõleges vektor. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $1 \leq i \leq n$, amelyre a $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{i-1}, \underline{u}, \underline{v}_{i+1}, \ldots, \underline{v}_n$ vektorok szintén lineárisan függetlenek! (ZH, 2006. november 9.)

16. Bizonyítsuk be, hogy egy 99 dimenziós vektortér két, 50 dimenziós alterének mindig van a nullvektortól különbözõ közös eleme! (ZH, 2002. október 31.)

17. Tegyük fel, hogy a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok lineárisan függetlenek a V (tetszőleges) vektortérben. Tegyük fel továbbá, hogy minden $\underline{u} \in V, \underline{u} \neq \underline{0}$ esetén léteznek olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{100}$ skalárok, amelyekre a $\underline{v}_1 + \alpha_1 \underline{u}, \underline{v}_2 + \alpha_2 \underline{u}, \ldots, \underline{v}_{100} + \alpha_{100} \underline{u}$ vektorok lineárisan összefüggők. Határozzuk meg V diemnzióját! (ZH, 2011. december 5.)