Bevezetés a Számításelméletbe I. — Harmadik gyakorlat
25. kurzus, 2012. szeptember 18.

1. Döntsd el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3 = 0 \right\}$; b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 = 1 \right\}$.

2. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben ($\mathbb{R}^3$-ben)

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e!

a) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lineárisan független. b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ lineárisan független. c) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$
d) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ generátorrendszer. e) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ bázis. f) $\underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ lineárisan független.
g) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ generátorrendszer.

3. Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független (egy tetszõleges vektortérben). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $\underline{a} - \underline{b}$, $\underline{a} - \underline{c}$, $\underline{b} + \underline{c}$ vektorrendszer is lineárisan független!

---

4. Tegyük fel, hogy egy (tetszőleges) V vektortér $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ elemeire $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d} = \underline{0}$. Melyek igazak mindig az alábbi állítások közül?

a) $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$; b) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$; c) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$.

5. Döntsd el az $\mathbb{R}^3$ tér alábbi részhalmazairól, hogy alteret alkotnak-e!

a) $\{(x, y, z) : x + 2y + 3z = 0\}$ b) $\{(x, y, z) : x + 2y + 3z = 1\}$

c) $\left\{(x, y, z) : \frac{x-5}{2} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z+8}{3}\right\}$ d) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \geq 0 \right\}$

6. a) Add meg a 2. feladatban bevezetett $\underline{a}$ és $\underline{d}$ vektorok által generált alteret! Milyen alakzatot alkotnak az altér elemei, és mi az egyenlete?

b) Mi a generált altér, ha hozzávesszük a $\underline{b}$ vektort is az előző két vektorhoz?

7. Legyen $\mathbb{R}^3$-ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Döntsd el, hogy az alábbi vektorrendszerek lineárisan függetlenek-e, illetve bázist alkotnak-e $\mathbb{R}^3$-ben!

a) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ b) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{a}$ c) $\underline{u}$, $\underline{a}$ d) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, $\underline{b}$ e) $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{b}$

8. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy (tetszõleges) vektortér vektorai és legyen $\underline{u} = \underline{a} + \underline{b}$, $\underline{v} = \underline{b} - \underline{c}$ és $\underline{w} = \underline{c} + 2\underline{a}$. Igazak-e az alábbi állítások?

a) Ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ is lineárisan független.

b) Ha $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ lineárisan független, akkor $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ is lineárisan független.

9. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy (tetszõleges) vektortér vektorai és legyen $\underline{u} = \underline{a} + \underline{b} - 2\underline{c}$, $\underline{v} = \underline{b} + \underline{c}$ és $\underline{w} = 4\underline{c} - \underline{a}$. Bizonyítsd be, hogy ha $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független, akkor $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ is lineárisan független!

10. Legyenek $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_k$ lineárisan független vektorok. Adjuk meg a c paraméter összes olyan valós értékét, melyre a $\underline{v}_1 - \underline{v}_2, \underline{v}_2 - \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{k-1} - \underline{v}_k, \underline{v}_k - c\underline{v}_1$ vektorok lineárisan függetlenek! (ZH, 1998. november 5.)

11. Tudjuk, hogy egy vektortérben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_{100}$ vektorok bázist alkotnak. Hány dimenziós a $\langle \underline{v}_1 + \underline{v}_2, \underline{v}_2 + \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_{99} + \underline{v}_{100}, \underline{v}_{100} + \underline{v}_1 \rangle$ altér? (ZH, 2007. október 24.)