

1. a) Írd fel a  $P(1, 4, -1)$  ponton átmenő és az  $\frac{x-5}{2} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z+8}{3}$  egyenletrendszerű egyenesre merőleges sík egyenletét!

b) Írd fel a  $Q(2, -5, -2)$  ponton átmenő és a  $z = 4x + 7$  egyenletű síkra merőleges egyenes egyenletrendszerét!

2. Legyen  $\mathbb{R}^4$ -ben

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Kifejezhető-e az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  és  $\underline{w}$  vektorokból (az  $\mathbb{R}^4$ -beli műveletekkel) az  $\underline{a}$  vektor?

b) Kifejezhető-e az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  és  $\underline{w}$  vektorokból a  $\underline{b}$  vektor?

c) Mely  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorok fejezhetőek ki  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  és  $\underline{w}$  segítségével? (Készíts olyan „tesztet”, amellyel egy tetszőleges  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorra a kérdés egyszerűen és gyorsan megválaszolható!)

3. Átmegy-e az origón az a sík, amely párhuzamos az  $5x - 4y + 3z = 9$  egyenletű síkkal és amely tartalmazza a  $P(1; 5; 5)$  pontot? (ZH, 2010. október 21.)

4. Döntsük el, hogy a  $P(2, 7, 3)$  és a  $Q(6, 3, 5)$  pontokon átmenő egyenesen rajta van-e az  $R(12, -3, 8)$  pont! (ZH, 2006. október 26.)

5. A  $p$  valós paraméter milyen értékeire  
a) merőleges az  $\frac{x-5}{3} = \frac{y-10}{p} = \frac{z+8}{4}$  egyenletrendszerű egyenes a  $12x - py + 16z = 5$  egyenletű síkra;

b) metszi az  $\frac{x-5}{3} = \frac{y-10}{p} = \frac{z+8}{4}$  egyenletrendszerű egyenes a  $12x - py + 16z = 5$  egyenletű síkot?

7. A  $P(1, -2, 5)$  és a  $Q(7, 6, 1)$  pontoktól egyenlő távolságra lévő pontok halmaza a térben síkot határoz meg (a  $P$  és a  $Q$  felezőmerőleges síkját). Határozzuk meg ennek a síknak az egyenletét! (ZH, 2003. január)

8. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a  $P(12; 1; 7)$  ponton és merőlegesen metszi az  $x - 3 = \frac{y - 2}{3} = \frac{-z - 1}{4}$  egyenletrendszerű egyenest! (ZH, 2010. december 6.)

9. Mely  $\mathbb{R}^4$ -beli vektorok fejezhetőek ki az

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és a } \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

vektorok segítségével? (Készíts „tesztet”!)

12. A  $2x + y - 3z = 2$  egyenletű  $S_1$  és az  $x + 7y + 3z = 21$  egyenletű  $S_2$  síkok esetében döntsük el, hogy

a) rajta van-e a  $P(5; 1; 3)$  pont az  $S_1$  és az  $S_2$  metszéspontján;

b) merőleges-e egymásra  $S_1$  és  $S_2$ ?

6. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben ( $\mathbb{R}^3$ -ben)

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Kifejezhető-e az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  és  $\underline{w}$  vektorokból (az  $\mathbb{R}^3$ -beli műveletekkel) az  $\underline{a}$  vektor?

b) Az  $\mathbb{R}^3$  tér mely vektorai fejezhetőek ki az  $\underline{u}$ ,  $\underline{v}$  és  $\underline{w}$  vektorokból? (Készíts „tesztet”!)

c) Az  $\mathbb{R}^3$  tér mely vektorai fejezhetőek ki az  $\underline{u}$  és  $\underline{v}$  vektorokból? (Készíts „tesztet”!)

d) Milyen geometriai alakzatot határoznak meg a c) feladat megoldásai?

10. Döntsük el, hogy a  $P(1, 4, 4)$  és a  $Q(3, 12, -2)$  pontokon átmenő egyenesen metszi-e a koordinátengelyek valamelyikét! Ha a válasz igen, adjuk meg a metszéspont(oka)t! (ZH, 2006. november 9.)

11. Tartalmazza-e az  $R(4; 1; 5)$  pontot az a sík, amely a  $P(1; 4; 2)$  és  $Q(3; 3; -1)$  pontokat összekötő egyenest a  $P$ -ben merőlegesen metszi?