Bevezetés a Számításelméletbe I. — Kilencedik gyakorlat

19. kurzus, 2011. november 5.

1. Tekintsük $V = \mathbb{R}^2$-nek azt az egydimenziós W alterét, amelyet az $(1,1)$ vektor generál. Tekintsük azt az $\mathcal{A}$ hozzárendelést, amely V pontjait merőlegesen vetíti W egyenesére. Lássuk be, hogy $\mathcal{A}$ lineáris leképezés, majd írjuk fel $\mathcal{A}$ mátrixát úgy, hogy V bázisaként a standard bázist használjuk, W bázisaként pedig a $(3,3)$ vektort!

---

2. Legyen V a síkbeli vektorok szokásos vektortere. Döntsd el, hogy az alábbi V-ről V-be menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, add meg a kép- és magterüket, ezek dimenzióját! Minden $\underline{v}$ vektornak feleltessük meg

a) az x tengelyre vett tükörképét;
b) azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátái közül a nagyobb;
c) azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátáinak összege;
d) az $y = x$ egyenesre való vetületét.

3. Legyen V a síkvektorok szokásos vektortere. Írd fel az alábbi $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris leképezések mátrixát a szokásos $\{(1,0),(0,1)\}$ bázisban!

a) az y tengelyre való tükrözés;
b) az origó körüli $+60°$-os forgatás;
c) előbb egy y tengelyre való tükrözés, majd egy origó körüli $+60°$-os forgatás.

4. Döntsd el, hogy az alábbi $\mathbb{R}^3$-ről $\mathbb{R}^2$-be (vagyis a szokásos térről a szokásos síkba) menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, add meg a kép- és magterüket, ezek dimenzióját, valamint írd fel a mátrixukat a „szokásos" bázisok (azaz $\mathbb{R}^3$-ben az $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\mathbb{R}^2$-ben az $\{(1,0),(0,1)\}$) szerint!

a) $\mathcal{A} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ b) $\mathcal{B} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cdot y \\ x \cdot z \end{pmatrix}$ c) $\mathcal{C} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+z \end{pmatrix}$

5. Legyen V a térvektorok szokásos vektortere, $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció és a $B = \{\underline{b_1}, \underline{b_2}, \underline{b_3}\}$ bázis V-ben. Tegyük fel, hogy az $\underline{b_1} = (1;2;3)$, $\underline{b_2} = (2;3;4)$ és $\mathcal{A}$ mátrixa a B bázis szerint az alábbi A mátrix. Határozzuk meg a $\underline{b_3}$ vektort, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}\left(\underline{b_1} + \underline{b_2} + \underline{b_3}\right) = (3;6;5)$. (ZH, 2010. december 6.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 3 \\ 4 & -2 & -2 \\ 4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

---

6. Legyen $\mathcal{A} : V \to V$ olyan lineáris transzformáció, amire $\mathcal{A}(\mathcal{A}(\underline{v})) = \underline{0}$ teljesül minden $\underline{v} \in V$-re. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathcal{A}$ transzformáció (tetszőleges bázisban felírt) A mátrixára $A^2 = 0$. (ZH részfeladat, 1997. november 1.)

7. Legyen adott a 2 dimenziós V vektortéren az $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris transzformáció és a $B = \{\underline{b_1}, \underline{b_2}\}$ bázis V-ben. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{A}$ mátrixa a B bázis szerint az alábbi A mátrix. Határozzuk meg p és q értékét, ha tudjuk, hogy $\mathcal{A}\left(\underline{b_1}\right) = \underline{b_2}$. (ZH, 2010. november 25.)

$$A = \begin{pmatrix} p & \sqrt{2} \\ q & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

8. Legyen A egy 6×5-ös valós mátrix. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

a) Ha az első három sor lineárisan összefüggő, akkor a bal felső 3×3-as aldetermináns 0.

b) Ha a bal felső 3×3-as aldetermináns 0, akkor az első három sor lineárisan összefüggő.

c) Ha az első három oszlop lineárisan összefüggő és az utolsó három oszlop is lineárisan összefüggő, akkor a $\mathrm{r}(A) \leq 3$.

d) Ha az első két oszlop lineárisan összefüggő és az utolsó két oszlop is lineárisan összefüggő, akkor a $\mathrm{r}(A) \leq 3$.

9. Legyen A és B $n \times m$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{r}(A+B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$ (ahol r-rel a mátrixok rangját jelöltük). (ZH, 2002. december 10.)