Bevezetés a Számításelméletbe I. — Második gyakorlat

19. kurzus, 2011. szeptember 12.

1. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Értelmezzük V-n a $\oplus$ vektorösszeadást és a vektorok valós számmal való $\odot$ szorzását a következőképpen: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$ és $\lambda \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix}$. Döntsd el, hogy a V halmaz a most definiált $\oplus$ és $\odot$ művelettel vektorteret alkot-e! (ZH, 2010. október 21.)

2. Döntsd el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3 = 0 \right\}$; b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 = 1 \right\}$.

---

3. Legyen a szokásos 3 dimenziós térben ($\mathbb{R}^3$-ben)

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ és } \underline{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Döntsd el az alábbi állításokról, hogy igazak-e!

a) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ b) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ generátorrendszer. c) $\underline{a}, \underline{b}, \underline{d}$ generátorrendszer.

4. Legyen V a pozitív valós számok halmaza. Minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ esetén legyen $\underline{u} \oplus \underline{v} = \underline{u} \cdot \underline{v}$ (vagyis $\oplus$ a pozitív valós számok szorzását jelöli!) és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár, valamint minden $\underline{v} \in V$ esetén legyen $\lambda \odot \underline{v} = \underline{v}^{\lambda}$. Döntsd el, hogy a V halmaz a most definiált $\oplus$ és $\odot$ művelettel vektorteret alkot-e!

5. Tegyük fel, hogy egy (tetszőleges) V vektortér $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ elemeire $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} + \underline{d} = \underline{0}$. Melyek igazak mindig az alábbi állítások közül?

a) $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle$; b) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$; c) $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle = \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$.

6. Legyen adott a térben az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ és a $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektor. Döntsük el, hogy az $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ generált altér egyenest vagy síkot határoz-e meg és írjuk fel a kapott geometriai alakzat egyenletét vagy egyenletrendszerét. (ZH, 2008. október 21.)

7. Döntsd el az $\mathbb{R}^3$ tér alábbi részhalmazairól, hogy alteret alkotnak-e!

a) $\{(x, y, z) : x + 2y + 3z = 0\}$ b) $\{(x, y, z) : x + 2y + 3z = 1\}$

c) $\left\{(x, y, z) : \frac{x-5}{2} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z+8}{3}\right\}$ d) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \geq 0 \right\}$

---

8. Legyen $V = \mathbb{R}$ a valós számok halmaza. Értelmezzük V-n a $\oplus$ vektorösszeadást és a vektorok valós számmal való $\odot$ szorzását a következőképpen: $\underline{u} \oplus \underline{v} = u + v + 1$ és $\lambda \odot \underline{v} = \lambda \cdot v + \lambda - 1$. Döntsd el, hogy a V halmaz a most definiált $\oplus$ és $\odot$ művelettel vektorteret alkot-e! (ZH, 2006. november 9.)

9. Döntsd el, hogy az $\mathbb{R}^4$ vektortérben alteret alkotnak-e az alábbi részhalmazok!

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_3 = 0 \right\}$; b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2 = 1 \right\}$;

c) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$; d) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \right\}$.

10.a) Add meg a 3. feladatban bevezetett $\underline{a}$ és $\underline{d}$ vektorok által generált alteret! Milyen alakzatot alkotnak az altér elemei, és mi az egyenlete?

b) Mi a generált altér, ha hozzávesszük a $\underline{b}$ vektort is az előző két vektorhoz?