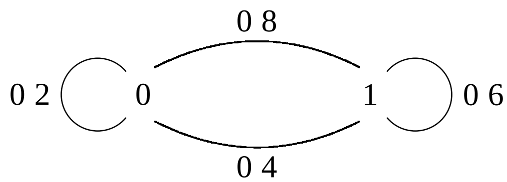
Tömegkiszolgálás zárthelyi

2003. november 20.

1. feladat. Dobjunk egy szabályos dobókockával n-szer egymás után, és tegyük fel, hogy a dobások egymástól függetlenek. Legyen X_n az n dobás során kapott értékek összege. Számítsuk ki a következő határértéket:

$$\lim_{n \quad \infty} \mathbf{P} \;\; X_n \text{ osztható 2003-mal}$$

2. feladat. Tekintsük az alábbi átmenetvalószínűség-gráffal adott Markov-láncot.



A láncot a 0 állapotból indítva, határozzuk meg a 0 állapotba történő visszatérési idő várható értékét! Milyen eloszlású az 1 állapotban tartózkodás ideje?

3. feladat. Milyen p esetén lesz a következő átmenetvalószínűség-mátrixszal adott végtelen állapotú Markov-lánc stabil? Adjunk elégséges feltételt!

$$\mathbf{\Pi} \qquad \begin{array}{cccccc} 1 \quad 2p & 2p & 0 & 0 & 0 & \\ 1 \quad 3p & p & 2p & 0 & 0 & \\ 0 & 1 \quad 3p & p & 2p & 0 & \\ 0 & 0 & 1 \quad 3p & p & 2p & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

4. feladat. Mi az előző feladatban megadott végtelen állapotú Markov-lánc határeloszlása stabilitás esetén?

5. feladat. Tekintsük az S_n $(n \quad 0)$ szimmetrikus bolyongást, ahol a felfelé és a lefelé lépések valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$, és $S_0 \quad 0$. (Vagyis $S_n \quad \sum_{i \quad 1}^{n} X_i$, ahol X_n független valószínűségi változók sorozata, melyek közös eloszlása $\mathbf{P} \; X_n \quad 1 \quad \mathbf{P} \; X_n \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad n \quad 1$-re.) Legyen

$$\tau : \quad \min \; n : S_n \quad 2$$

vagyis az a (minimális) lépésszám, amikor a bolyongás során először jutunk a kezdeti 0 állapotból a 2-be. Határozzuk meg a τ valószínűségi változó eloszlását generátorfüggvény segítségével! (τ generátorfüggvénye $F \; z \quad \mathbf{E} \; z^{\tau} \quad \sum_{n \quad 0}^{\infty} z^n \mathbf{P} \; \tau \quad n$, ha $z \quad 1$.)