A Számítástudomány alapjai

1. pZH javítókulcs (2014. 12. 08.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. A $*****$-XXXXX focimeccs végeredménye 6 : 3 lett XXXXX csapatának javára. Hányféleképpen születhetett meg ez az eredmény, azaz hányféle lehetett az egyes gólok utáni állások sorrendje?

   A gólok sorrendjét egy olyan 9 hosszú sorozat írja le, melyben 3 db „$*$” és 6 db „X” szerepel. (3 pont)
   Ráadásul minden ilyen sorozat leírja a gólok egy lehetséges sorrendjét. (2 pont)
   Pontosan annyiféleképp születhetett meg tehát a végeredmény, amennyi az ilyen tulajdonságú sorozatok száma. (2 pont)
   Az ilyen sorozatok ismétléses permutációt alkotnak, (1 pont)
   így a tanult képlet szerint a számuk $\frac{9!}{3!\cdot 6!}$, (1 pont)
   ez tehát a feladat kérdésére is a válasz. (1 pont)

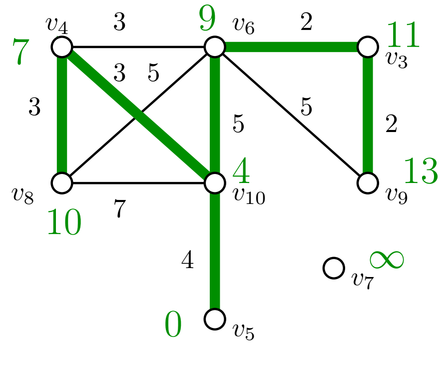
   Az is épp ilyen jól meghatározza a gólok sorrendjét, ha megmondjuk, hogy a 9 rúgott gól közül melyik 3-at rúgta $*****$$*$, és így binomiális együtthatóként jön ki a $\binom{9}{3}$ válasz.

2. Tudjuk, hogy a 6 pontú G gráf fokszámai $2, 2, 2, 4, 5, 5$. Igazoljuk, hogy G nem egyszerű.

   Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy mégiscsak létezik egy 6 pontú, egyszerű G gráf a feladatbeli fokszámsorozattal. (2 pont)
   Ekkor mindkét 5-ödfokú csúcs minden más csúccsal össze van kötve (3 pont)
   tehát a három másodfokú csúcs mindegyike csak a két ötödfokú csúccsal szomszédos, (2 pont)
   a negyedfokúval nem. (1 pont)
   A negyedfokú csúcsnak tehát csak a két ötödfokú csúcs lehet a szomszédja, ami ellentmond G egyszerűségének. A kapott ellentmondás pedig az indirekt feltevés helytelenségét, azaz a feladat állítását igazolja. (2 pont)

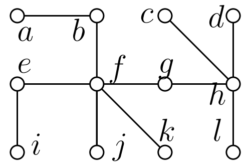
3. Legyen $V(G) = \{v_3, v_4, \ldots, v_{10}\}$, és $v_iv_j \in E(G)$, ha i és j nem relatív prímek, azaz van 1-nél nagyobb közös osztójuk. Legyen a v_iv_j él hossza $\min(i, j) - 1$. Határozzunk meg a v_5 csúcsból minden más csúcsba egy-egy legrövidebb utat, ha van.

   A $[3, 10]$ intervallumban két szám pontosan akkor nem relatív prím, ha mindkettő osztható a $2, 3$ vagy 5 prímek valamelyikével. (1 pont)
   Ezért G a v_4, v_6, v_8, v_{10} ill. v_3, v_6, v_9 valamint a v_5, v_{10} klikkek uniója, v_7 pedig izolált pont. (2 pont)
   A mellékelt ábra a G gráfot és az élhosszokat mutatja. (1 pont)
   Az órán tanult Dijksta algoritmust alkalmazva ($U = \{v_5\}$-ből kiindulva, élmenti javításokkal, és az U halmazhoz pontok $\{v_{10}, v_4, v_6, v_8, v_3, v_9\}$ sorrendben történő hozzávételével) meghatározhatjuk minden csúcs v_5-től való távolságát, és a legrövidebb utak fáját. (4 pont)
   A v_5-től mért távolságokat a csúcsok mellé írt számok jelzik, a legrövidebb utak fájának élei pedig meg lettek vastagítva. Ha tehát v_5-ből egy másik csúcsba szeretnénk legrövidebb úton eljutni, akkor a megvastagított faélek mentén érdemes haladnunk. (2 pont)



4. Az ábrán látható valamely G gráf egy szélességi fája. Honnan indulhatott a bejárás, ha tudjuk, hogy b és c szomszédosak G-ben?

Azt tanították, hogy G minden csúcsának a gyökértől való távolsága ugyanannyi a BFS fában mint G-ben. (3 pont)
Az is igaz továbbá, hogy ha két csúcs szomszédos G-ben, akkor a gyökértől való távolságuk legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. (2 pont)
Mivel b és c szomszédosak G-ben, ezért b-t a gyökérrel összekötő fabeli út hossza legfeljebb 1-gyel tér el a c-t a gyökérrel összsekötő fabeli út hosszától. (2 pont)
Tehát a mellékelt BFS fán a BFS bejárás kiindulási csúcsának távolsága b-től és c-től legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. Márpedig minden g-től különböző csúcsra e két távolság különbsége legalább 2, (2 pont)
így a BFS bejárás kezdőcsúcsa csakis g lehetett. (1 pont)



5. Igaz-e, hogy minden aciklikus, irányított G gráf csúcsainak pontosan egy topologikus sorrendje van?

Az állítás nem igaz, és ehhez elegendő egyetlen aciklikus, irányított gráfot mutatni, amelynek a csúcsai egynél többféleképp is topologikus sorrendbe rendezhetők. (4 pont)
Legyen a G gráfnak két csúcsa (u és v) és 0 éle. Ekkor G aciklikus irányított gráf, és u, v ill. v, u is topologikus sorrend. (5 pont)
A G gráf csúcsainak tehát nem pontosan egy topologikus sorrendje van, a feladatban megfogalmazott állítás ezért nem igaz. (1 pont)

Lehet éppenséggel kevésbé triviális ellenpéldát is mutatni, az éppúgy jó.

6. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor G-nek van két olyan Hamilton köre, melyeknek nincs közös éle.

A Dirac tétel miatt G-nek van egy C Hamilton köre, hiszen G midnen fokszáma legalább a pontok számának fele, azaz 10. (3 pont)
Ha most C éleit elhagyjuk G-ből, akkor az így kapott $G - C$ gráfban minden fokszám legalább 10 lesz. (3 pont)
Ismét teljesül tehát a Dirac-feltétel, így Dirac tétele szerint $G - C$-nek is van Hamilton köre, mondjuk C'. (3 pont)
A konstrukció folytán a G gráf C és C' Hamilton köreinek nincs közös éle, ez pedig igazolja a feladatban kimondott állítást. (1 pont)

A Számítástudomány alapjai

2. ZH javítókulcs (2014. 12. 08.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 77 pontja van, független pontjainak maximális száma pedig $\alpha(G) = 19$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \geq 5$ teljesül G kromatikus számára.

   Indirekt tegyük fel, hogy a G gráfot ki tudtuk színezni legfeljebb 4 színnel. Az azonos színűre színezett csúcsok (azaz a színosztályok) független ponthalmazok, hisz azonos színű pontokat nem köt össze él. (3 pont)

   Mivel $\alpha(G) = 19$, ezért egyetlen független ponthalmaznak, így egyetlen színosztálynak sem lehet 19-nél több pontja. (3 pont)

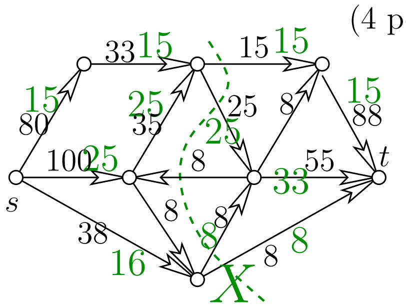
   A G gráfnak tehát legfeljebb $4 \cdot 19 = 76$ pontja lehet. (2 pont)

   Ez ellentmond annak, hogy G-nek 77 pontja van, és ez az indirekt feltevés helytelenségét, azaz a $\chi(G) \geq 5$ egyenlőtlenséget igazolja. (2 pont)

2. Találjunk az ábrán látható hálózatban minimális kapacitású st-vágást és bizonyítsuk be, hogy nincs a megtaláltnál kisebb kapacitású st-vágás.

   Maximális nagyságú folyamot keresünk az órán tanult Ford-Fulkerson algoritmus segítségével. Az aktuális segédgráf néhány st-útja mentén történő javítások után az ábrán látható, 56 nagyságú f folyamot kapjuk. (A nagyobb méretben (zölddel) szedett számok az f folyam értékét jelzik az adott élen, ha egy élen nincs ilyen szám, akkor azon $f = 0$.) (4 pont)

   A megfelelő segédgráfban s-ből elérhető pontok X halmaza által meghatározott st-vágás szintén 56 kapacitású. (4 pont)
   Mivel a hálózatban létezik 56 nagyságú folyam, ezért tetszőleges st-vágás kapacitása legalább 56, mi pedig találtunk egy pontosan 56 kapacitású st-vágást. Ez azt mutatja, hogy az ábrán szaggatott vonall jelzett st-vágás valóban minimális kapacitású. (2 pont)

   (A teljes értékű megoldáshoz nem szükséges, hogy a hallgató megindokolja, hogyan talált olyan folyamot és st-vágást, melyek nagysága ill. kapacitása megegyezik.)

3. Tegyük fel, hogy a 88 pontú G páros gráfban $\alpha(G) = 44$. Igazoljuk, hogy G-re teljesül a Hall feltétel, azaz $|X| \leq |N(X)|$ az A színosztály minden X részhalmaza esetén.

   Mivel G páros, ezért G-nek nincs hurokéle, így Gallai idevágó tétele szerint $44+\tau(G) = \alpha(G)+\tau(G) = |V(G)| = 88$. (3 pont)

   A G gráfra Kőnig tétele is érvényes, így $\nu(G) = \tau(G) = 88 - 44 = 44$. (3 pont)

   Ha egy 88 pontú gráfban $\nu(G) = 44$, akkor G-nek van teljes párosítása, (1 pont)

   így a Frobenius tétel szerint a G gráf A színosztályára teljesülnie kell a feladatban szerencsére helyesen felírt Hall feltételnek. (3 pont)

   Igazából egyik fent használt tételre sincs szükség.

   A G mindkét színosztálya független ponthalmaz, ezért G nagyobbik színosztálya legalább 44 pontú, azaz $\alpha(G) \geq 44$. Mivel $\alpha(G) = 44$, ezért G mindkét színosztályában pontosan 44 csúcs található: $|A| = |B| = 44$. (2 pont)

   Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy $|X| > |N(X)|$ teljesül valamely $X \subseteq A$ ponthalmazra. (1 pont)

   Ekkor X-ből nem fut él a $B \setminus N(X)$ halmaz egyetlen pontjába sem (2 pont)

ezért $X \cup (B \setminus N(X))$ független ponthalmaz. (2 pont)
Ám ekkor $\alpha(G) \geq |X \cup (B \setminus N(X))| =$ (1 pont)
$= |X| + |B \setminus N(X)| = |X| + |B| - |N(X))| = |X| + 44 - |N(X)| > 44,$ (1 pont)
ami ellentmond az $\alpha(G) = 44$ feltevésnek, így igazolja az indirekt feltevés hamis voltát, tehát a feladat állítása csakugyan igaz. (1 pont)

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű G gráf síkbarajzolható, akkor a pontjainak legfeljebb a fele lehet 10-nél nagyobb fokú.

Elegendő az állítást összefüggő gráfokra igazolni, hiszen ha G minden komponensére igaz, hogy az adott komponens csúcsainak legfeljebb a felének a fokszáma nagyobb 10-nél, akkor ugyanez az egész G gráfra is teljesül. Feltehetjük tehát, hogy G összefüggő, és legalább 12 csúcsú, hisz ellenkező esetben G-nek egyetlenegy legalább 11 fokú pontja sincs. (1 pont)
Legyenek tehát n, t és e a G szokásos paraméterei, és jelölje m a G legalább 11-edfokú csúcsainak számát. Az Euler formula miatt $n + t = e + 2$. (3 pont)
A fokszámok összege a kétszeres élszám, ezért $2e \geq 11m + (n - m)$, azaz $2e \geq 10m + n$, hiszen m csúcs fokszáma legalább 11, és a maradék $(n - m)$-é pedig legalább 1. (2 pont)
Minden él 2 tartományt határol, és minden tartományt legalább 3 él határol, ezért $2e \geq 3t$ (2 pont)
A fentiek szerint tehát, $6n + 4e \geq 6n + 6t = 6e + 6$, azaz $6n \geq 2e + 6 \geq 10m + n + 6$, ahonnan $5n \geq 10m + 6 > 10m$ adódik, más szóval $n > 2m$, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. (2 pont)

5. Hány pozitív osztója van 10!-nak?

Azt tanították az órán, hogy ha n kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor n pozitív osztóinak száma $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (a_k + 1)$. (3 pont)
A cél tehát 10! kanonikus alakjának meghatározása. Ezt a kanonikus alakot megkaphatjuk úgy is, hogy összeszorozzuk az $1, 2, \ldots, 10$ számok kanonikus alakjait. (2 pont)
Mivel ez utóbbi kanonikus alakokban csak a $2, 3, 5$ és 7 prímek szerepelnek, ezért csupán ezen prímek kitevőit kell meghatároznunk. (1 pont)
A 2 kitevője $5 + 2 + 1 = 8$ az 5 db páros, 2 db néggyel osztható és 1 db nyolccal osztható tényező miatt. A 3 kitevője $3 + 1 = 4$ a 3 db 3-mal osztható és 1 db 9-cel osztható tényező miatt. Az 5 kitevője 2, hisz 5 és 10 osztható 5-tel a tíz tenyezőből. Végül az egyetlen 7-tel osztható tényező a 7, tehát $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. (3 pont)
A pozitív osztók számára vonatkozó képlet alapján tehát $d(10!) = 9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270$. (1 pont)

6. Oldjuk meg a $17x \equiv 8 \pmod{177}$ lineáris kongruenciát.

Mivel 17 és 177 relatív prímek, ezért a kongruencia megoldható, és a megoldások halmaza egy modulo 177 maradékosztály. (2 pont)
A megoldás során az előadáson megbeszéltek értelmében eltekintünk a mod karaktersorozat kiírogatásától. Egészítsük ki a $17x \equiv 8(177)$ lineáris kongruenciát a triviális $177x \equiv 0(177)$ kongruenciával. A kapott kongruenciarendszer megoldásai pontosan azok az x egészek lesznek, melyek megoldják az eredeti kongruenciát. (2 pont)
A második kongruenciát helyettesítjük azzal, amit úgy kapunk, hogy a másodikból kivonjuk az első 10-szeresét: $7x = 177x - 170x = 0 - 80(177)$. (2 pont)
Így az alábbi kongruenciarendszer adódik: $17x \equiv 8(177)$ ill $7x \equiv -80(177)$. (1 pont)
A második kongruencia 2-szeresét az elsőből kivonva azt kapjuk, hogy $3x = 17x - 14x \equiv 8 - 2 \cdot (-80) = 168(177)$, vagyis a $7x \equiv -80(177)$, $3x \equiv -9(177)$ rendszer adódik. Most az első konruenciából vonjuk ki a második kétszeresét: $x = 7x - 2 \cdot 3x \equiv -80 - 2 \cdot (-9) = -62(177)$, (2 pont)
tehát a kongruencia megoldása $x \equiv 115(177)$. (1 pont)
(Ha most ez utóbbi kongruencia háromszorosát kivonnánk a $3x \equiv 15(177)$ kongruenciából, akkor a $0x \equiv -9 - 3 \cdot 115 = -354 \equiv 0(177)$ adódna, de erre nincs szükség az első megjegyzés miatt.)

Természetesen a lineáris kongruencia megoldható más, a fentitől eltérő módszerrel is, és a helyesen alkalmazott helyes módszer szerint megkapott helyes végeredmény természetesen 10 pontot ér.