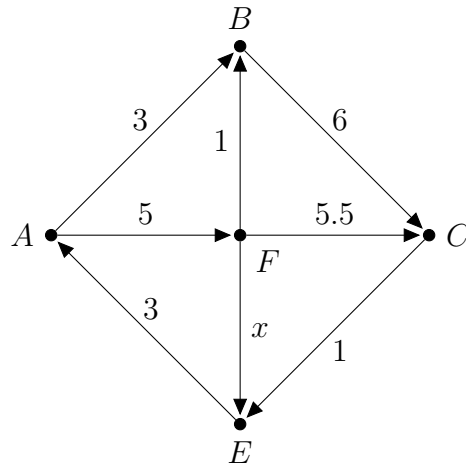


Algoritmuselmélet - Pótzárthelyi  
2023. május 11.

A munkaidő 100 perc. A VÁLASZOKAT INDOKOLNI KELL.

Hivatkozni csak az előadáson tanultakra lehet.

1. Alkalmas  $c$  konstans és  $n_0$  küszöbérték megadásával lássa be, hogy  $37n^2 \log n + 17\sqrt{n} + 7 \in O(n^2)$  vagy pedig bizonyítsa be, hogy ez nem igaz.
2. Adott egy  $n$  csúcsú kör, melynek minden pontjába egy  $n$ -nél kisebb pozitív egész szám van írva. Ha egy csúcsba a  $d$  érték van írva, akkor ebből a csúcsból egyetlen ugrással vagy balra vagy jobbra lehet lépni, pontosan  $d$  csúccsal arrébb. Adott a körben egy  $A$  és egy  $B$  csúcs és azt szeretnénk meghatározni, hogy el lehet-e jutni  $A$ -ból kiindulva  $B$ -be és ha igen, akkor legkevesebb hány ugrással. Adjon erre a feladatra  $O(n)$  lépésszámú algoritmust.
3. Egy nyolc csúcsú egyszerű, irányítatlan  $G$  gráfban DFS-t (mélységi bejárást) futtatunk és eközben az alábbi éleket választjuk be a DFS-fába ebben a sorrendben:  $ab, be, ac, cd, dg, dh, cf$ . Mennyi a  $c$  csúcs  $G$ -beli fokszámának lehetséges legkisebb értéke és mennyi a lehetséges legnagyobb értéke?
4. Szomszédossági mátrixával adott egy élsúlyozott,  $n$  csúcsú egyszerű, irányított gráf, amiben nincsen irányított kör. A gráf néhány csúcsára egy-egy tábla óriási csokoládé van rárakva. Adjon  $O(n^2)$  lépésszámú algoritmust, ami a gráf minden csúcsára meghatározza, hogy milyen messze van a csúcstól a legközelebbi csokoládé (egy csokoládé távolsága a legrövidebb oda vezető út hosszával egyezik meg).
5. Dijkstra-algoritmussal határozza meg az alábbi gráfban az  $A$  pontból az összes többi pontba menő legrövidebb utak hosszát az  $x$  pozitív valós paraméter függvényében. Indokolni nem kell, de látszódjon, hogy lépésenként hogyan változik a  $D[\ ]$  tömb és a KÉSZ halmaz.



6. Mátrixával adott egy ország úthálózatának irányítatlan, élsúlyozott gráfja: a csúcsok a városok ( $n$  város van), az élek a városok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig az útszakasz megtételéhez szükséges várható időtartam. Adott az országban néhány város, ahol van mentőállomás és szeretnénk eldönteni, hogy igaz-e, hogy az ország bármely városa elérhető legalább egy mentőállomástól legfeljebb  $M$  perc alatt. Melyik tanult algoritmus alkalmazásával és hogyan lehet  $O(n^2)$  lépésben megoldani ezt a feladatot?
7. Egy  $n \times n$  méretű táblázat mezőin lépkedünk a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba úgy, hogy egy lépésben a táblázatban vagy lefelé vagy jobbra egyet lépünk. A táblázat néhány mezője veszélyes (ismerjük, hogy melyek ezek) és az a szabály, hogy az út során legfeljebb egy veszélyes mezőt érinthetünk. A táblázat minden cellájában egy egész szám áll és egy út értéke az úton található számok összege.

Adjon  $O(n^2)$  lépésszámú dinamikus programozást használó eljárást, ami meghatározza, hogy mekkora a legnagyobb értékű, a fenti szabályokat betartó út értéke.